Lycée Cité El-amal
Mr :Marzouk Ali

Lycée Farhat Hachad
Mr :Ben Hassine Hedi

Lycée Av de la république
Mr :Zarati Moncef

Devoir de synthèse n°3
08/05/2014
Section :Mathématiques
Epreuve: Mathématiques - Durée : 4 heures - Coefficient : 4

Le sujet comporte 4pages numérotées de 1/4 à 4/4.La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice N°1 (3points)

Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c. Pour chacune des questions indiquer avec justification le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points : A (1, 1, 0), B (1, 0, 1) et C (0, 1, 1). On désigne par t la translation de vecteur $\vec{u}=\frac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$ et par h l'homothétie de centre A et de rapport $\left(-\frac{2}{3}\right)$.

1) Le volume du tétraèdre OABC est :

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$

2) L'image du plan (ABC) par t est le plan d'équation :

a) $x+y+z-\frac{7}{2}=0$; b) $x+y+z-1=0$; c) $x+y+z-\frac{1}{2}=0$;

3) Si (S) est la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{3}$, alors son image par h est la sphère (S') :

a) de centre $\Omega\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},0\right)$ et de rayon $R=\frac{4\sqrt{3}}{9}$;

b) de centre $\Omega\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{3},0\right)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$;

c) de centre $\Omega\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},0\right)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$;

Exercice N°2 (4points)

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ».

Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement du réseau, exprimé en heures. On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ

1) On sait que $p(X < 7) = 0{,}6$.
Montrer qu'une valeur approchée de λ arrondie à 10^{-3} près est 0,131.
Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

2) Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.

3) Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.

4) Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.

5) On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
a) Quelle est la loi suivie par Y ?
b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures.
c) Calculer l'espérance mathématique de Y. (on arrondira à l'entier le plus proche).

Exercice N°3 (4points)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'un pays de 1950 à 1985. t_i désigne le rang de l'année et p_i la population en millions d'habitants.

Année	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985
t_i	0	5	10	15	20	25	30	35
p_i	8	8,9	9,9	11	12	13,5	15	16,6

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série (t_i,p_i).Interpréter .

2) On pose $y_i = \ln(p_i)$

a) Recopier et compléter le tableau suivant. (Les valeurs seront arrondies à 10^{-3} prés)

t_i	0	5	10	15	20	25	30	35
$y_i = \ln(p_i)$	2,079			2.398				2.809

b) Donner à 10^{-3} près par défaut le coefficient de corrélation linéaire r' de la série $(t_i;y_i)$.

c) Déterminer une équation de la droite de régression de y en t.

d) En déduire l'expression de la population p en fonction du rang t de l'année.

3) On admet que la fonction f définie sur [0; 35] par : $f(t) = 8\,e^{0,02t}$ est une modélisation satisfaisante de l'évolution de la population (en millions d'habitants) de 1950 à 1985.

a) Étudier le sens de variation de f sur [0; 35] et dresser le tableau de variations de f

b) On pose : $I = \int_0^{35} f(t)\,dt$. Donner une valeur approchée de I arrondie à 10^{-2} près.

En déduire la population moyenne m du pays durant ces 35 années.

c) En quelle année la population aurait-elle dépassé les 19 millions d'habitants ?

Exercice N°4 (4points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

1) a) Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la droite $\Delta : x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe de f.

2) a) Etudier les variations de f sur $[1,+\infty[$.

b) Vérifier que $\forall x \in [1,+\infty[\ : \ \frac{f(x)}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})$. Puis en déduire la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.

c) Dans la figure donnée en annexe (à rendre) on a tracé la courbe de f incomplète dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Compléter la.

3) Soit d_n l'aire de la partie du plan limité par la courbe de f et les droites : y = 0, x = 1 et x = n avec n un entier naturel strictement supérieur à 1.

On a tracé sur le même repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe de la fonction g définie par : $g(x) = \ln(x) - 1$.

a) Vérifier graphiquement que pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a $\ln(x^2 - 2x + 2) \succ \ln(x) - 1$.

b) En déduire que pour tout entier $n \succ 1$ on a $d_n \succ n\ln(n) - 2n + 2$.

c) La suite (d_n) est-elle convergente ?

Exercice N°5 (5points)

I) Soit l'équation différentielle (E) : $y' - ny = e^{nx}$ où n est un entier naturel.

1) Vérifier que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{nx}$ est une solution de (E)

2) a) Montrer que h est solution de (E) $\Leftrightarrow$ h – u est solution de (E_0) : $y' - ny = 0$

b) Résoudre (E_0) et en déduire les résolutions de (E).

II) Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = xe^x$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

Sur la courbe C, tracée ci-dessous, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1 et on a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe C .On a placé les points A' (a ; 0) et B' (1 ; 0).

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale.

1) Montrer que : $\int_0^1 xe^x \, dx = 1$

2) a) Donner l'aire du triangle OAA'.

b) Montrer que l'aire du trapèze ABB'A' est égale à $\frac{1}{2}\left(-a^2e^a + ae^a - ae + e\right)$.

c) En déduire que l'aire de la partie du plan hachurée est égale à $\frac{1}{2}\left(ae^a - ae + e - 2\right)$.

3) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)= x\left(e^x - e\right) + e - 2$.

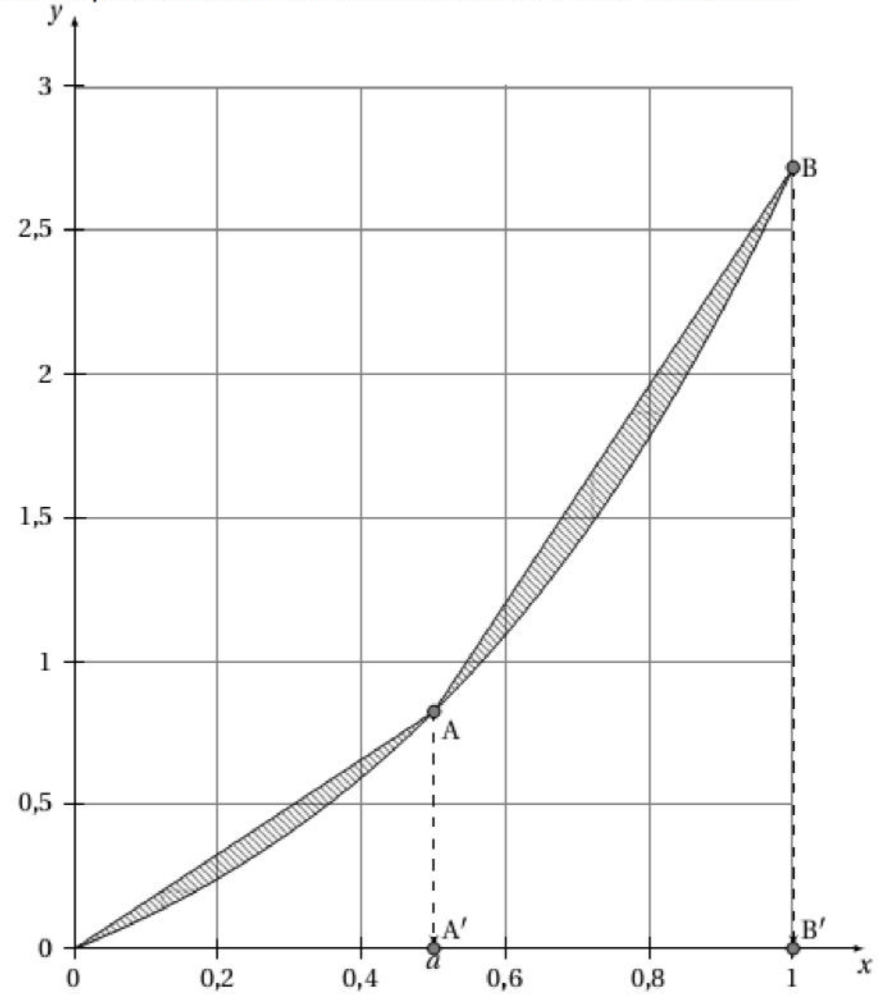
a) Calculer g'(x) et vérifier que g'' est définie sur $[0;+\infty[$ par $g''(x) = (x+2)e^x$.

b) En déduire les variations de la fonction g' sur $[0;+\infty[$.

c) Établir que l'équation g'(x) =0 admet une solution unique α dans l'intervalle $[0;+\infty[$ et que $0,5 \prec \alpha \prec 0,6$.

d) En déduire les variations de la fonction g sur $[0;+\infty[$.

4) En utilisant les réponses aux questions précédentes, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.



Annexe du devoir de synthèse n°3

Nom et prénom :…………………………………………….