LycéeMahmoud Elmesaadi ELFAHS	DEVOIR DE SYNTHESE N°3	Prof : Ben HMIDENE Tarak
2013- 2014	MATHEMATIQUES	4math Durée : 4 heures

Exercice n°1(3points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant

1) Le quotient de -57 par 7 est -8

2) L'équation $8x - 4y = 1$ admet dans au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

3) Soit n un entier vérifiant $n \equiv 19 \ (mod\ 20)$ alors $n^{2013} + n^{2014} \equiv 0 \ (mod\ 20)$

4) Soit x un entier non nul si $x^2 + x \equiv 0 \ (mod\ 6)$ alors $x \equiv 0 \ (mod\ 3)$

Exercice n°2(4points)

Soit, dans, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E): $17x - 11y = 1$.

1)a) Vérifier que le couple (2,3) est une solution particulière de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) .

c) Résoudre en suite dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $17x - 11y = 2$

2)Montrer qu'il existe un seul entier x_0 tel que $0 \le x_0 < 11$ vérifiant $17x_0 \equiv 1 \ (mod\ 11)$ et déterminer sa valeur

3) Soient x , y et a trois entiers tels que $x = 17a - 2$ et $y = 3a - 1$

a)Calculer $3x - 17y$ et en déduire les valeurs possibles de $d = x \wedge y$

b) Déterminer les valeurs de x pour $d = 11$

Exercice n°3(3points)

On considère l'équation différentielle (E) : $2y' - y = e^{\frac{x}{2}}$

1)a)Démontrer que la fonction $g(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}$ est solution de (E)

b) Résoudre l'équation différentielle (E') : $2y' - y = 0$

c)Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E')

d) En déduire les solutions de (E)

2) Déterminer la solution f de (E) tel que $f(0) = \frac{1}{2}$

3)Soit $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^{\frac{x}{2}}$

a)Etudier les variations de f

b) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit V le volume du solide engendrer par la rotation de l'arc

$C = \{M(x, y)\ tels\ que\ -1 \leq x \leq 0\ et\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

Calculer V

Exercice n°4(4points)

A) Au rayon de l'électronique d'un grand magasin un téléviseur et un lecteur de DVD sont en promotion pendant une semaine. Une personne se présente :

- La probabilité qu'elle achète le téléviseur est $\frac{3}{5}$

- La probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle achète le téléviseur est $\frac{7}{10}$

- La probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle n'achète pas le téléviseur est $\frac{1}{10}$.

On désigne par T : « La personne achète le téléviseur » et L : « La personne achète le lecteur de DVD »

1) Déterminer les probabilités des évènements suivants :

a) «La personne achète les deux appareils» ;

b) «La personne n'achète aucun des deux appareils »

2) Montrer que, si la personne achète le lecteur de DVD, la probabilité qu'elle achète aussi le téléviseur est $\frac{21}{31}$

B) La durée de vie (en année) d'un téléviseur est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.016$

1) a) Calculer .p(X ≥ 10)

b) Calculer la probabilité pour qu'un téléviseur ait une durée de vie inférieure à deux ans

2) Sachant qu'un téléviseur a déjà dépassé deux ans, Quelle est la probabilité qu'il fonctionne plus que dix ans ?

3) Le gérant du magasin achète n téléviseurs $(n \in \mathbb{N}^*)$ ***du modèle précédent.***

On suppose que la durée de vie d'un appareil est indépendante de celle des autres.

. Déterminer n pour que le nombre moyen de téléviseurs qui ont une durée de vie plus que deux ans soit supérieur à 10 .

Exercice n°5(6points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

1)a)Etudier les variation de f

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ *sur un intervalle J que l'on déterminera.*

c)Montrer que l'équation $f(x) = x$ *admet une unique solution* α *et que* $0.5 < \alpha < 1$

2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \int_0^{\alpha} [f(x)]^n \, dx$

a) Calculer I_1

b) Vérifier que : $f'(x) = f(x) - [f(x)]^2$

c)En déduire que pour tout $n > 0$ $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} - \alpha^n\right)$

d) Montrer que la suite (I_n) *est décroissante et positive*

3) Montrer que pour tout $n > 0$ *on a :* $\frac{\alpha}{2^n} < I_n < \alpha^{n+1}$.

En déduire $\lim_{n\to\infty} I_n$.

4)a) Montrer que pour tout n > 1

$$I_n = -\ln[2(1-\alpha)] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$$

b) En déduire : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$

5) Sur l'annexe, on donne les courbes de f et de f^2

a) Identifier les deux courbes.

b) Construire dans le même repère la courbe de f^{-1}

c) Calculer en fonction de α *l'aire A du domaine hachure*

ANNEXE :A rendre avec ta copie

Nom :   Prénom :