

**Beni Hassen**

ⓈⓈⓈⓈⓈⓈⓈⓈⓈⓈ

2014/2015

## Devoir de synthèse n°3

4 M

07/05/2015

Prof :  
M.Mohamed Krir

Durée : 4 h

### EXERCICE N°1:( 4 pts )

Pour chacune des questions suivantes, une seule des propositions est exacte .Indiquer sur la votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie ,sans justification.

1) Soit l'équation différentielle ( E ) :  $y'' + 4 y = 0$ . Soit f la solution de (E) dont la courbe passe par  $K(0, 2)$  et la tangente en K a pour coefficient directeur 4.

(a)  $f(x) = 4 \sin(2x) + 2 \cos(2x)$     (b)  $f(x) = 2 \sin(x) + 2 \cos(x)$

(c)  $f(x) = 2 \sin(2x) + 2 \cos(2x)$ .

2) La durée d'attente X , en années, d'un appareil avant la première panne suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,2$ .

La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des 3 premières années à  $10^{-4}$  près

(a) 0,5523            (b) 0,5488            (c) 0,4512            (d) 1,0012

3) La droite de régression de Y en X d'une série statistique double est :  $y = - 5 x + 20,75$  .

Le coefficient de corrélation linéaire r est égal à :

(a) 1,01            (b) 0,99            (c) - 0,93            (d) - 1,03

4) Le tableau suivant donne l'âge X en mois et la masse Y en kilogramme d'un enfant durant ses premiers mois.

X	2	3	4	5	9	15
Y	6	6,8	7,5	7,8	10,6	12,4

Le coefficient de corrélation linéaire r de la série ( X, Y ) est :

(a) 0,8675            (b) 0,9847            (c) 2,3435            (d) - 0,9999

### EXERCICE N°2 : ( 4 pts )

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (1 - x) e^{2x}$ . On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \overset{1}{i}, \overset{1}{j})$ .

1) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2)a) Prouver que la courbe  $\mathcal{C}$  admet un point d'inflexion  $I$  qu'on précisera.

b) Donner une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point  $I$ .

c) Tracer  $T$  et  $\mathcal{C}$ .

3) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives :  $x = 0$  et  $x = 1$ .

4) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :  $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $2 I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$

### EXERCICE N°3 : ( 4 pts )

Soit  $(O, \overset{1}{i}, \overset{1}{j}, \overset{1}{k})$  un repère orthonormé direct de l'espace  $\xi$ . On considère les points  $A(0,0,1)$ ,  $B(1,0,1)$ ,  $C(2,1,-1)$  et  $I(-2,1,2)$ .

1)a) Déterminer les composantes du vecteur  $\vec{n} = \overline{AB} \wedge \overline{AC}$

b) En déduire que  $A$ ,  $B$  et  $C$  déterminent un plan  $P$  dont on donnera une équation cartésienne

c) Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

d) Déterminer la distance du point  $C$  à la droite  $(AB)$ .

2) a) Prouver que  $IABC$  est tétraèdre.

b) Déterminer le volume du tétraèdre  $IABC$ .

c) En déduire de ce qui précède la distance de  $I$  au plan  $P$ .

3) Soit  $S$  la sphère de centre  $I$  et passant par  $A$ . Montrer que  $S$  et  $P$  sont sécants suivant un cercle  $\zeta$  à caractériser.

4) Soit  $h$  l'homothétie de centre  $I$  et de rapport  $\lambda = \frac{1}{5}$ .

a) Déterminer l'expression analytique de  $h$ .

b) Déterminer  $(S')$  image de  $(S)$  par  $h$ .

c) Déterminer  $A' = h(A)$  puis déduire une équation cartésienne du plan  $P' = h(P)$ .

d) Montrer que  $S' \cap P'$  est un cercle  $\zeta'$  à préciser le centre et le rayon.

### **EXERCICE N° 4 :( 4 pts )**

Soit dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation ( E ) :  $4x - 7y = 28$

1)a) Montrer que si  $(x,y)$  est une solution de ( E ) alors  $x \equiv 0 \pmod{7}$

b) En déduire les solutions de ( E ).

2) On considère le système ( S ) : 
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases} ; x \in \mathbb{Z}$$

a) Vérifier que 19 est solution du système ( S ) .

b) En déduire les solutions du système ( S ) .

3)a)  $k \in \mathbb{Z}$  . Déterminer le reste de  $3^{6k}$  modulo 4 et de  $5^{6k}$  modulo 7.

b) Vérifier que 2007 est solution du système ( S )

c) Prouver que  $2007^{2010} \equiv 1 \pmod{28}$  . En déduire le reste modulo 28 de  $2007^{2015}$  .

### **EXERCICE N° 5 : ( 4 pts )**

Un sac contient trois boules indiscernables au toucher numérotées 0 , 1 et 2. On tire au hasard successivement et avec remise deux boules ,on note x le numéro de la première boule tirée et y celui de la deuxième. A chaque tirage de deux boules on associe le point  $M(x , y)$  dans un repère orthonormé  $( O , \vec{i} , \vec{j} )$ . On désigne par D le disque de centre O et de rayon  $\frac{17}{10}$  .

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « le point M appartient à l'axe des abscisses »    B : « le point  $M \in \zeta_{(0,1)}$  »

2) Soit X l'aléa numérique égale à  $OM^2$  .

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3) Prouver que la probabilité de l'événement «  $M \in D$  » est égale à  $\frac{4}{9}$  .

4) On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant les boules tirées dans le sac après chaque tirage . Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants

C : « deux points exactement appartiennent à D »

E : « uniquement le troisième point appartient à D »

et F : « le premier point appartenant à D est celui de la troisième épreuve ».

5) On renouvelle n fois de suite ,de façon indépendante ,le tirage de deux boules successivement et avec remise On obtient n points du plan. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que la probabilité de l'événement G : « au moins un de ces points appartient à D » soit supérieure ou égale à 0,9999.

**BON TRAVAIL**