

L.ALI Bourguiba K.K

Classe :4M2

Durée : 4heures

Prof :Raoudha Abdesslem

Le 8/5/2013

# DEVOIR DE SYNTHÈSE N3

## Exercice1 :(2 points )

Répondre par vrai ou faux **en justifiant** :

1)soit  $a$  et  $b$  deux entiers non nuls on a :  $a \wedge b = (2a + b) \wedge (a + b)$

2)la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2e^{1-x}$  est une solution de  $y' + y = 0$

3) soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels , si  $ab \equiv 0 \pmod{6}$  alors  $a \equiv 0 \pmod{6}$  ou  $b \equiv 0 \pmod{6}$

4)soit  $f$  et  $f_0$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$

Si  $f_0$  et  $f$  sont solutions de  $Y'' + Y = x$  alors  $f - f_0$  est solution  $Y'' + Y = 0$

## Exercice2 :(3 points)

Le tableau suivant donne le taux d'équipement en récepteur numérique des ménages d'une certaine région de 2007 à 2012

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012
X :Rang de l'année	1	2	3	4	5	6
Y :taux en %	5	8	24	50	77	88

1)Représenter le nuage de points de la série  $(X, Y)$ , peut on pratiquer un ajustement affine ?

2)Déterminer les coordonnées du point moyen du nuage

3)Déterminer un ajustement affine de  $Y$  en  $X$  par la méthode de Mayer

4)Déduire en quelle année ce taux dépasse 95%.

## Exercice3 :(4 points)

1)a)Trouver à l'aide de l'algorithme d'Euclide-Bezout une solution particulière de  $17x - 12y = 1$

b)Résoudre dans  $\mathbb{Z}$ ,  $17x \equiv 1 \pmod{12}$

c)Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$ , (E) :  $17x - 12y = 3$

2) Soit  $x$  et  $y$  deux entiers et  $N = 2 + 17x = 5 + 12y$

a) Montrer que  $x$  et  $y$  sont solutions de (E)

b) Dédurre que  $N \equiv 53 \pmod{204}$

3) Montrer que si  $N \equiv 53 \pmod{204}$  alors  $\begin{cases} N \equiv 2 \pmod{17} \\ N \equiv 5 \pmod{12} \end{cases}$

4) Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de  $n$  pièces d'or,  $n \in [400, 500]$ , d'égales valeurs. Ils décident de les partager également et donner le reste au cuisinier chinois, celui-ci recevra alors 2 pièces. Mais les pirates se querellent et 4 d'entre eux sont tués, le cuisinier recevrait alors 5 pièces.

Déterminer le nombre de pièces. (Justifier)

#### Exercice 4 : (4 points)

Un constructeur automobile achète des pneus à 3 fournisseurs dans les proportions suivantes :

20% au premier fournisseur, 50% au deuxième fournisseur et 30% au troisième fournisseur.

Le premier fournisseur fabrique 90% de pneus sans défaut, le second fournisseur fabrique 95% de pneus sans défaut et le troisième fournisseur fabrique 80% de pneus sans défaut

Tous les résultats seront donnés à  $10^{-3}$  près

1) On choisit un pneu au hasard dans la livraison

a) Déterminer la probabilité que le pneu soit sans défaut

b) Le pneu choisi étant sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur

2) On considère un lot de 20 pneus

a) Déterminer le nombre moyen de pneus défectueux

b) Déterminer la probabilité qu'un pneu au plus soit défectueux

3) La durée de vie en Km d'un pneu est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $2 \cdot 10^{-5}$

a) Quelle est la densité de probabilité de cette loi

b) Quelle est la probabilité qu'un pneu dure moins de 50000 Km ?

c) Quelle est la probabilité qu'un pneu dure plus que 100 000 Km ?

### Exercice 5: ( 7 points )

1) La courbe (C) à côté est celle d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (ax + b)e^{x-1} + c$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels

La droite  $D: y = 1$  est une asymptote à (C)

(C) admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale

a) Dresser le tableau de variation de  $f$

b) Calculer  $f'(x)$

c) Justifier que  $a = 1, b = -1$  et  $c = 1$

2) Donc  $f(x) = (x - 1)e^{x-1} + 1$

Soit  $A$  la région du plan délimitée par (C), et les droites d'équations  $y = 0, x = 0$  et  $x = 1$  et soit  $I(1,0)$

On se propose de montrer qu'il existe un seul point  $M \in (C)$

tel que  $[IM]$  partage  $A$  en 2 régions de même aire

Soit pour tout  $x \in [0, 1], M(x, f(x))$  et  $\Delta_x$  la région du plan délimitée par (C),  $[IM]$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $y = 0$

Soit  $g(x) = \text{aire}(\Delta_x)$  et  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

a) Calculer l'aire de  $A$

b) Montrer que  $g(x) = F(x) + \frac{1}{2}(1-x)f(x)$

c) sans calculer  $g(x)$ , étudier les variations de  $g$

d) Dédire qu'il existe un seul  $\alpha \in [0, 1]$  tel que  $g(\alpha) = \frac{1}{2} \text{aire}(A)$

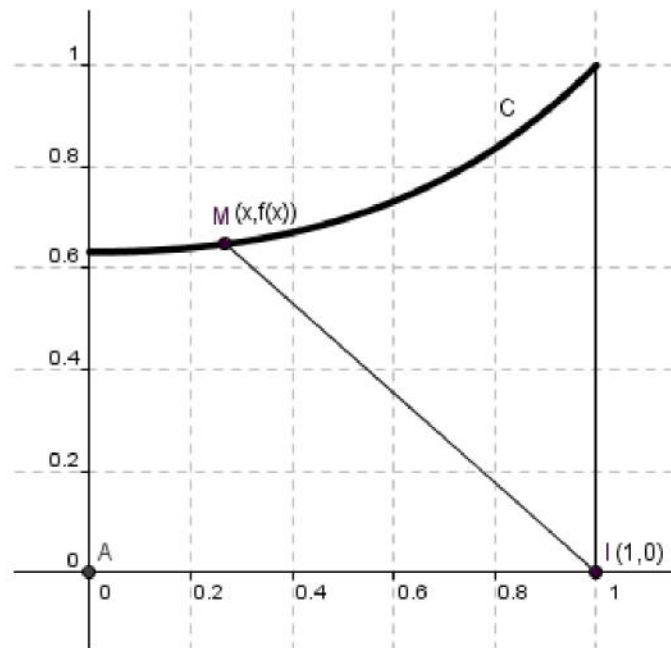
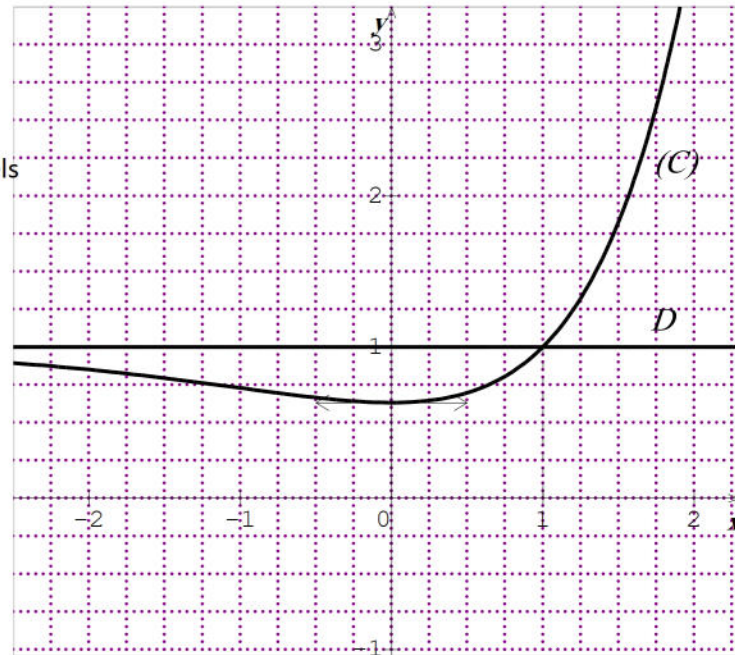
3) Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, U_n = \int_1^2 (x-1)^n e^{x-1} dx$  et Soit  $G(x) = \int_1^{1-2\ln x} (t-1)^n e^{t-1} dt, x > 0$

a) Calculer  $U_1$

b) Montrer que  $U_{n+1} = e - (n+1)U_n$  et déduire  $U_2, U_3$  et  $U_3$

c) Montrer que  $G$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que  $G'(x) = (-2)^{n+1} \frac{(\ln x)^n}{x^3}$

d) Montrer que  $G(x) = (-2)^{n+1} \int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^3} dt$  et déduire  $\int_1^{\frac{1}{\sqrt{e}}} \frac{(\ln t)^4}{t^3} dt$



### Exercice 1 :

1) Vrai en effet soit  $d = a \wedge b$  et  $d' = (a + b) \wedge (2a + b)$

On a  $d$  divise  $a$  et  $b$  donc  $d$  divise  $a+b$  et  $d$  divise  $2a + b$  donc  $d$  divise  $d' = (a + b) \wedge (2a + b)$

Et  $d'$  divise  $a+b$  et  $2a+b$  donc  $d'$  divise  $(2a+b)-(a+b)=a$  et  $d'$  divise  $2(a+b)-(2a+b)=b$  donc  $d'$  divise  $d = a \wedge b$  Donc  $d=d'$

2) Vrai en effet  $f'(x) = -2e^{1-x}$  donc  $f'(x) + f(x) = 0$  donc  $f$  est une solution de  $y' + y = 0$

3) faux  $12=3.4$  est un multiple de 6 mais 3 n'est pas un multiple de 6 et 4 n'est pas un multiple de 6

4) Vraie en effet  $f$  et  $f_0$  sont solutions de  $y''+y=x$  donc  $f''(x)+f(x)=x$  et  $f_0''(x)+f_0(x)=x$  donc  $f''(x)+f(x)-f_0''(x)-f_0(x)=0$

Donc  $(f-f_0)''(x) + (f-f_0)(x) = 0$  donc  $f-f_0$  est une solution de  $y''+y=0$

### Exercice 2

1) Le nuage de points est allongé donc on peut pratiquer un ajustement affine

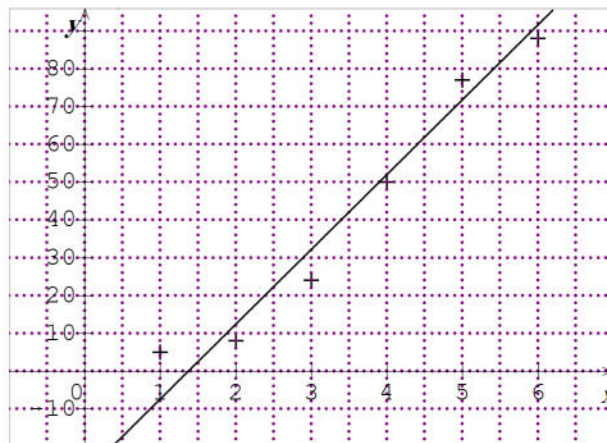
2)  $G(3.5 ; 42)$

3)  $G_1(2 ; 12,33)$  et  $G_2(5,71.67)$ ,  $(G_1G_2) : y = ax + b$

$$a = \frac{71.67 - 12.33}{5 - 2} = 19.78, \quad b = 12.33 - 1978.2 = -27.23$$

4)  $y > 95$  eq  $1978x - 27.23 > 95$  eq  $x > 6.18$

Donc à partir de 2013 ce taux dépasse 95%



### Exercice 3

1)a)

reste	17	12	5	2	1
quotient		1	2	2	1

On a  $17.5 - 12.7 = 1$  donc  $(5,7)$  est une solution de  $17x - 12y = 1$

b) on a  $17.5 \equiv 1 \pmod{12}$

$17.x \equiv 1 \pmod{12}$  donc  $17x \equiv 17.5 \pmod{12}$  donc  $17(x-5) \equiv 0 \pmod{12}$  donc 12 divise  $17(x-5)$  et  $12 \wedge 17 = 1$

Donc 12 divise  $(x-5)$  donc  $x - 5 = 12.k$  avec  $k$  entier donc  $x = 12.k + 5$

Réciproquement si  $x = 12k + 5$  alors  $17x = 17.12k + 17.5 \equiv 1 \pmod{12}$  Donc  $S = \{12k + 5, k \text{ entier}\}$

c)  $(15, 21)$  est une solution particulière donc  $17.15 - 12.21 = 17x - 12y$  donc  $17(x-15) = 12(y-21)$  donc 17 divise  $12(y-21)$

or 17 et 12 sont premiers entre eux donc 17 divise  $y - 21$  donc  $y - 21 = 17k$ ,  $k$  entier donc  $y = 17k + 21$

par suite  $17(x-15) = 12.17k$  eq  $x - 15 = 12k$  eq  $x = 12k + 15$  donc  $S = \{(12k + 15, 17k + 21), k \text{ entier}\}$

2)a)  $2 + 17x = 5 + 12y$  donc  $17x - 12y = 3$  donc  $(x,y)$  est solution de (E)

b)  $x = 12k + 15$  donc  $N = 2 + 17x = 2 + 17(12k + 15) = 2 + 204k + 255 = 257 + 204k = 53 + 204 + 204k \equiv 53 \pmod{204}$

quotient	1	2	2	1	
0	1	1	3	7	17
1	0	1	2	5	12

3) on suppose que  $N \equiv 53 \pmod{204}$  donc  $N = 53 + 204k'$  donc  $N - 2 = 51 - 204k' = 17(12k + 3) \equiv 0 \pmod{17}$  et

$N - 5 = 48 + 204k' = 12(4 + 17k') \equiv 0 \pmod{12}$  donc  $N \equiv 2 \pmod{17}$  et  $N \equiv 5 \pmod{12}$

4)  $n \equiv 2 \pmod{17}$  et  $n \equiv 5 \pmod{12}$  eq  $n \equiv 53 \pmod{204}$  eq  $n = 53 + 204k''$  et  $n \in [400, 500]$  donc  $n = 53 + 204 \cdot 2 = 461$

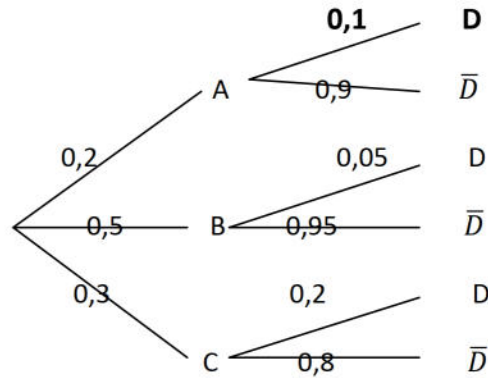
**Exercice 4 :**

1) Soit A « le pneu est fabriqué par A »

B « le pneu est fabriqué par B »

C « le pneu est fabriqué par C »

D « le pneu est défectueux »



a)  $p(\bar{D}) = 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,95 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,895$

b)  $p(A/\bar{D}) = \frac{p(A \cap \bar{D})}{p(\bar{D})} = 0,201$

2) Soit X l'aléa numérique égale au nombre de pneus défectueux, X suit une li binomiale de paramètres (20, 0,105)

a)  $E(X) = 20 \cdot 0,105 = 2,1$     b)  $p(X=0) + p(X=1) = 0,364$

3) a)  $f(x) = 210^{-5} e^{-2 \cdot 10^{-5} x}$     b)  $p(X < 50000) = 1 - e^{-1}$     c)  $p(X > 100000) = e^{-2}$

**Exercice 5:**

1) a)

b)  $f'(x) = (ax + b + a) e^{x-1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-		+
f(x)	1	f(0)	$+\infty$

c)  $f(1) = 1$  donc  $a + b + c = 1$ ,  $f'(0) = 0$  donc  $b + a = 0$  et  $f'(1) = 1$  donc  $2a + b = 1$  on trouve  $a = 1, b = -1$  et  $c = 1$

2) a)  $\text{aire}(A) = \int_0^1 (x - 1)e^{x-1} + 1 dx = [(x - 1)e^{x-1}]_0^1 - \int_0^1 e^{x-1} dx + 1 = 2e^{-1}$

b) Soit H le projeté orthogonal de M sur  $(o, \vec{i})$ , soit  $\Delta_1$  le domaine limité par (C),  $(o, \vec{i})$ ,  $(o, \vec{j})$  et (HM)

on a  $g(x) = \text{aire}(\Delta_1) + \text{aire}(MHI) = F(x) + \frac{1}{2} (1-x) f(x)$

c)  $g'(x) = f(x) + \frac{1}{2} (1-x) f'(x) - \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} (1-x) f'(x) > 0$

x	0	1
g'(x)		+
g(x)	$\frac{1 - e^{-1}}{2}$	$2e^{-1}$

d)  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[0,1]$  donc elle réalise une bijection de  $[0,1]$  sur

$$g([0,1]) = \left[ \frac{1-e^{-1}}{2}, 2e^{-1} \right]$$

$0,5 \cdot \text{aire}(A) = e^{-1} \in \left[ \frac{1-e^{-1}}{2}, 2e^{-1} \right]$  donc il existe un unique  $\alpha \in [0,1]$  tel que  $g(\alpha) = \frac{1}{2} \text{aire}(A)$

$$3) U_1 = \int_1^2 (x-1)e^{x-1} dx = [(x-1)e^{x-1}]_1^2 - \int_1^2 e^{x-1} dx = 1$$

$$U_{n+1} = [(x-1)^{n+1}e^{x-1}]_1^2 - \int_1^2 (n+1)(x-1)^n e^{x-1} dx = e - (n+1)U_n$$

$$U_2 = e - 2, \quad U_3 = -2e + 6, \quad U_4 = 9e - 24$$

$$c) \text{ soit } u(x) = 1 - 2\ln x, \quad f_n(t) = (t-1)^n e^{t-1}$$

$u$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ ,  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $G$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et

$$G'(x) = u'(x) \cdot f(u(x)) = \frac{-2}{x} (-2\ln x)^n e^{-2\ln x} = \frac{-2}{x^3} (-2)^n (\ln x)^n = \frac{(-2)^{n+1} (\ln x)^n}{x^3}$$

$$d) G'(x) = \frac{(-2)^{n+1} (\ln x)^n}{x^3} \quad \text{et } G(1) = 0 \quad \text{donc } G(x) = (-2)^{n+1} \int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^3} dt$$

$$\text{pour } n=4 \quad \text{et } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \text{on a } \int_1^{\frac{1}{\sqrt{e}}} \frac{(\ln t)^4}{t^3} dt = \frac{1}{(-2)^5} G\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-1}{32} \int_1^{1-2\ln\frac{1}{\sqrt{e}}} (t-1)^4 e^{t-1} dt = \frac{-1}{32} U_4$$