

Devoir de synthèse n°3

08/05/2014

Section :Mathématiques

Epreuve: Mathématiques - Durée : 4 heures - Coefficient : 4

Le sujet comporte 4pages numérotées de 1/4 à 4/4.La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice N°1 (3points)

Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c. Pour chacune des questions indiquer avec justification le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : A (1, 1, 0),

B (1, 0, 1) et C (0, 1, 1). On désigne par t la translation de vecteur $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ et par h l'homothétie de

centre A et de rapport $\left(-\frac{2}{3}\right)$.

1) Le volume du tétraèdre OABC est :

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2}$

2) L'image du plan (ABC) par t est le plan d'équation :

a) $x+y+z-\frac{7}{2}=0$;

b) $x+y+z-1=0$;

c) $x+y+z-\frac{1}{2}=0$;

3) Si (S) est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{3}$, alors son image par h est la sphère (S') :

a) de centre $\Omega\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{4\sqrt{3}}{9}$;

b) de centre $\Omega\left(-\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$;

c) de centre $\Omega\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$;

Exercice N°2 (4points)

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ».

Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement du réseau, exprimé en heures. On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ

1) On sait que $p(X < 7) = 0,6$.

Montrer qu'une valeur approchée de λ arrondie à 10^{-3} près est 0,131.

Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront arrondies à 10^{-2} près.

2) Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.

3) Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.

4) Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.

5) On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.

a) Quelle est la loi suivie par Y ?

b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures.

c) Calculer l'espérance mathématique de Y. (on arrondira à l'entier le plus proche).

Exercice N°3 (4points)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'un pays de 1950 à 1985. t_i désigne le rang de l'année et p_i la population en millions d'habitants.

Année	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985
t_i	0	5	10	15	20	25	30	35
p_i	8	8,9	9,9	11	12	13,5	15	16,6

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série (t_i, p_i) . Interpréter .

2) On pose $y_i = \ln(p_i)$

a) Recopier et compléter le tableau suivant. (Les valeurs seront arrondies à 10^{-3} près)

t_i	0	5	10	15	20	25	30	35
$y_i = \ln(p_i)$	2,079			2.398				2.809

b) Donner à 10^{-3} près par défaut le coefficient de corrélation linéaire r' de la série $(t_i; y_i)$.

c) Déterminer une équation de la droite de régression de y en t .

d) En déduire l'expression de la population p en fonction du rang t de l'année.

3) On admet que la fonction f définie sur $[0; 35]$ par : $f(t) = 8 e^{0,02t}$ est une modélisation satisfaisante de l'évolution de la population (en millions d'habitants) de 1950 à 1985.

a) Étudier le sens de variation de f sur $[0; 35]$ et dresser le tableau de variations de f

b) On pose : $I = \int_0^{35} f(t) dt$. Donner une valeur approchée de I arrondie à 10^{-2} près.

En déduire la population moyenne m du pays durant ces 35 années.

c) En quelle année la population aurait-elle dépassé les 19 millions d'habitants ?

Exercice N°4 (4points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

1) a) Vérifier que f est bien définie sur \mathbb{R} .

b) Montrer que la droite $\Delta : x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe de f .

2) a) Etudier les variations de f sur $[1, +\infty[$.

b) Vérifier que $\forall x \in [1, +\infty[: \frac{f(x)}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})$. Puis en déduire la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.

c) Dans la figure donnée en annexe (à rendre) on a tracé la courbe de f incomplète dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Compléter la.

3) Soit d_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f et les droites : $y = 0$, $x = 1$ et $x = n$ avec n un entier naturel strictement supérieur à 1.

On a tracé sur le même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de la fonction g définie par : $g(x) = \ln(x) - 1$.

a) Vérifier graphiquement que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $\ln(x^2 - 2x + 2) > \ln(x) - 1$.

b) En déduire que pour tout entier $n > 1$ on a $d_n > n \ln(n) - 2n + 2$.

c) La suite (d_n) est-elle convergente ?

Exercice N°5 (5points)

I) Soit l'équation différentielle (E) : $y' - ny = e^{nx}$ où n est un entier naturel.

1) Vérifier que la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = xe^{nx}$ est une solution de (E)

2) a) Montrer que h est solution de (E) $\Leftrightarrow h - u$ est solution de (E_0) : $y' - ny = 0$

b) Résoudre (E_0) et en déduire les résolutions de (E) .

II) Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = xe^x$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

Sur la courbe C , tracée ci-dessous, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1 et on a tracé les segments $[OA]$ et $[AB]$. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments $[OA]$ et $[AB]$ et la courbe C . On a placé les points $A'(a; 0)$ et $B'(1; 0)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale.

1) Montrer que : $\int_0^1 xe^x dx = 1$

2) a) Donner l'aire du triangle OAA' .

b) Montrer que l'aire du trapèze $ABB'A'$ est égale à $\frac{1}{2}(-a^2e^a + ae^a - ae + e)$.

c) En déduire que l'aire de la partie du plan hachurée est égale à $\frac{1}{2}(ae^a - ae + e - 2)$.

3) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x(e^x - e) + e - 2$.

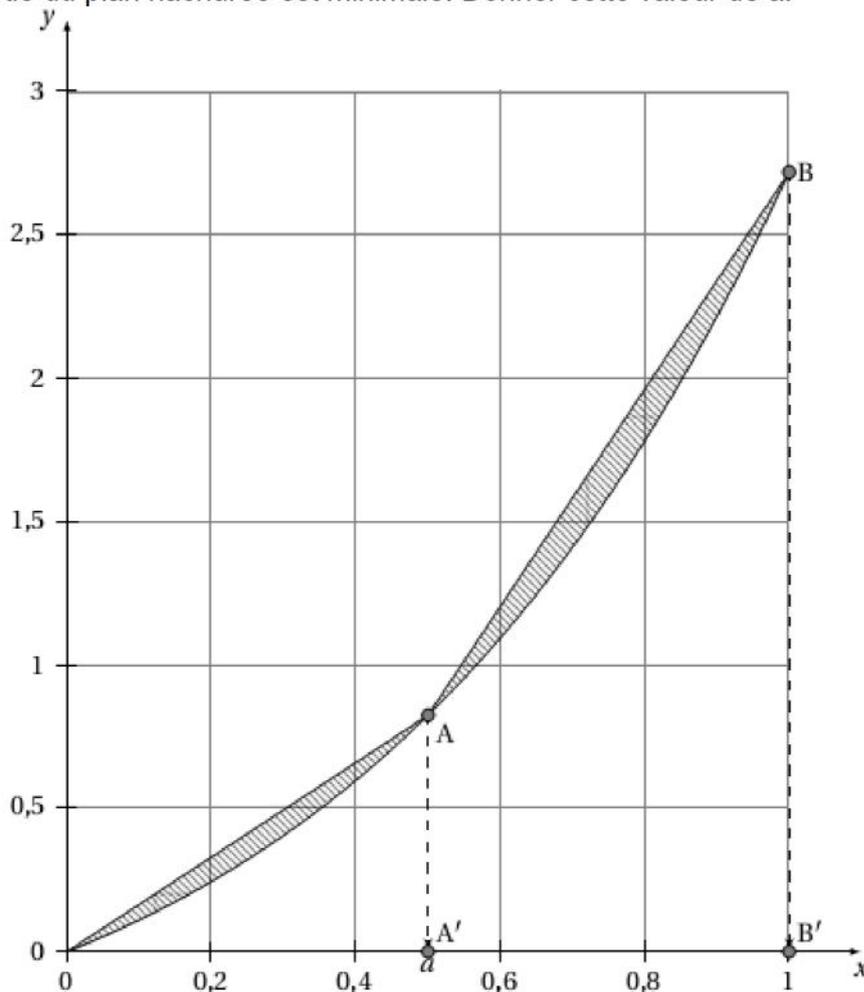
a) Calculer $g'(x)$ et vérifier que g'' est définie sur $[0; +\infty[$ par $g''(x) = (x+2)e^x$.

b) En déduire les variations de la fonction g' sur $[0; +\infty[$.

c) Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; +\infty[$ et que $0,5 < \alpha < 0,6$.

d) En déduire les variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$.

4) En utilisant les réponses aux questions précédentes, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a .



Annexe du devoir de synthèse n°3

Nom et prénom :

