



DEVOIR DE SYNTHÈSE N°3
PROF – BELLILI MONGI & EL ABDIDI ZAHI
DATE : 09 / 04 / 2013 , Durée : 04 h



EXERCICE N°1

On considère l'équation différentielle $(E): y' - 2y = 2e^{2x} - 2$

1- Montrer que la fonction $g : x \mapsto 2xe^{2x} + 1$ est une solution de (E)

2°) Résoudre l'équation différentielle $(E'): y' - 2y = 0$

3°) a- Montrer qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E')

b- Dédurre alors les solutions de (E)

c- Déterminer la solution f_0 de (E) qui prend la valeur 1 en 0

EXERCICE N°2

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par: $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ et on

désigne par ζ_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

I- 1°) Dresser le tableau des variations de la fonction f_1

2°) Montrer que ζ_1 admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées puis donner une équation de la tangente T à ζ_1 au point I

3°) Tracer ζ_1 et T

II- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose: $I_n = \int_0^n f_n(x) dx$

1°) Donner une interprétation géométrique de I_n

2°) a- Montrer que pour tout réel $t \in [0, +\infty[$, on a: $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$

b- Dédurre que pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ on a: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

c- Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x \in [0, n]$ on a: $x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$

et que: $e^{-x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2n}} \leq f_n(x) \leq e^{-x}$

3°) Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $I_n \leq 1 - e^{-n}$

4°) a- Montrer que pour tout réel $t \in [0, +\infty[$, on a: $e^{-t} \geq 1 - t$

b- Dédurre que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x \in [0, n]$ on a: $e^{-x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2n}} \geq e^{-x} \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right)$

c- A l'aide de deux intégrations par parties, calculer l'intégrale: $\int_0^n e^{-x} \left(1 - \frac{x^2}{2n}\right) dx$

d- Dédurre que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $I_n \geq 1 - \frac{1}{n} + e^{-n} \left(\frac{1}{n} + \frac{n}{2}\right)$

5°) Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite

EXERCICE N°3

- 1°) a- Vérifier que $(2, 1)$ est une solution de l'équation (E) : $7x - 11y = 3$ puis la résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
b- Déterminer les coordonnées entières des points de la droite D : $7x - 11y - 3 = 0$ comprises entre 0 et 15

2°) Soit u un entier vérifiant le système S:
$$\begin{cases} u \equiv 2 \pmod{7} \\ u \equiv 5 \pmod{11} \end{cases}$$

Déterminer le reste modulo 77 de u

- 3°) pour tout entier n on pose : $a = 11n + 2$ et $b = 7n + 1$ et on désigne par d le PGCD de a et b
a- Quelle sont les valeurs possibles de d ?

b- Montrer que $d = 3 \Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod{3}$

- c- Montrer que les entiers $(11 \times 2012^{2k} + 2)$ et $(7 \times 2012^{2k} + 1)$ sont premiers entre eux pour tout $k \in \mathbb{N}$

EXERCICE N°4

Dans une population donnée, 60 % des familles occupent une maison individuelle.
Parmi elles, 75 % en sont propriétaires de leur logement. Parmi les familles n'occupant pas une maison individuelle, 33 % sont propriétaires de leur logement.

On choisit au hasard une famille et on considère les événements suivants :

I : « La famille habite une maison individuelle »

A : « La famille est propriétaire de son logement »

- I°) a- Déterminer les probabilités : $P(I)$, $P(A/I)$ et $P(A/\bar{I})$

b- Déterminer la probabilité pour que la famille habite une maison individuelle et propriétaire

c- Quelle est la probabilité que la famille n'habite pas une maison individuelle et non propriétaire

d- Montrer que : $P(A) = 0,582$

e- Quelle est la probabilité pour que la famille habite une maison individuelle sachant quelle est propriétaire de son logement ?

II°) On interroge n familles au hasard et successivement

1°) On prend dans cette question $n = 5$

a- Quelle est la probabilité d'avoir cinq familles propriétaire de leur logement

b- Quelle est la probabilité d'avoir au moins quatre familles propriétaire de leur logement

c- Quel est le nombre moyen des familles propriétaire de leur logement

2°) a- Soit n un entier naturel quelconque, déterminer en fonction de n , la probabilité P_n pour qu'il on a au moins une famille propriétaire de son logement

b- Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geq 0,95$

EXERCICE N°5

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'un pays de 1970 à 2005 .

T désigne le rang de l'année et P est la population (en millions d'habitants)

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Rang de l'année : T	0	5	10	15	20	25	30	35
Population: P	8	8,9	9,9	11	12	13,5	15	16,6

1°) Représenter le nuage de points associé a la série statistique (T, P) dans un repère orthogonal

2°) Calculer le coefficient de corrélation de la série statistique (T, P) .

Un ajustement affine est-il justifié ? si oui, déterminer la droite de régression de P en T

3°) Les experts cherchent à modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est au voisinage du nuage de points. Pour cela, on pose : $Y = \ln(P)$

a- Déterminer la droite de régression de Y en T

b- Dédire l'expression de la population P en fonction de T.

4°) on admet que la fonction f définie sur $[0, 35]$ par : $f(t) = 8e^{0,02t}$ est une modélisation satisfaisante de l'évolution de population (en millions d'habitants) de 1970 à 2005.

a- Calculer l'intégrale $I = \int_0^{35} f(t)dt$ puis déduire la population moyenne du pays durant les 35 années

b- Si le modèle exponentielle précédent reste valable après 2005, en quelle année la population aurait-elle dépassé 20 millions d'habitants ?

BON TA
BIAVA