

**Epreuve****Mathématiques**

Durées : 4 heures

**Lycée de Sbeitla  
Devoir de synthèse N°3  
Classes : 4<sup>ème</sup> Maths**

Année scolaire : 2013/2014

**Professeurs**Elabidi Zahi  
Et  
Bellili Mongi

NB : Ce devoir comporte 5 pages

**Exercice 01 : (5 points)**

Dans l'annexe ci-jointe (page 4) on a tracé dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  du plan, les courbes représentatives  $\zeta_f$  et  $\zeta_g$  des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = e^x - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$$

- $\zeta_f$  coupe l'axe des abscisses au point  $A(\alpha, 0)$
- $\zeta_g$  coupe l'axe des abscisses au point  $B(\beta, 0)$

1) a) Donner le signe de  $f(x)$  et celui de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$

b) Justifier que :  $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$  et que  $\ln \beta = \frac{1}{\beta}$

2) Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $h(x) = e^x - \ln x$  et  $\zeta_h$  sa courbe représentative dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

a) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x}$

b) Vérifier que :  $h(\alpha) = -g(\alpha)$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction  $h$

3) a) Etudier la position relative des courbes  $\zeta_f$  et  $\zeta_h$

b) Construire la courbe  $\zeta_h$  de  $h$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

4) Soit  $a$  un réel tel que :  $a \in ]0, +\infty[$ . La droite  $\Delta : x = a$  coupe les courbes  $\zeta_f$  et  $\zeta_g$  respectivement en  $M$  et  $N$ . Montrer que la distance  $MN$  est minimale pour  $a = \alpha$

**Exercice 02 : (4 points)**

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) :  $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$

1) Déterminer la solution  $h$  de l'équation différentielle (E') :  $y' + y = 0$  qui prend la valeur 1 en 0

2) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que :

$$f(0) = \ln 2 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} g(x)$$

a) Calculer  $g(0)$

b) Calculer  $f'(x)$  en fonction de  $g'(x)$  et  $g(x)$

c) Montrer que  $f$  est une solution de (E), si et seulement si,  $g'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

d) En déduire l'expression de  $g(x)$  puis celle de  $f(x)$  de telle sorte que  $f$  soit solution de (E)

- 3) On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$

### Exercice 03 : (4 points)

Une enquête faite dans une cité populaire a montré que 30 personnes adultes sur 100 consomment des drogues. Une association de lutte contre les drogues a entamé une action dans cette cité.

Elle a organisé une session de traitement pour les consommateurs de drogues et une session de sensibilisation pour les non consommateurs.

L'association a constaté que :

- Parmi les adultes consommateurs de drogues, 75% réussissent à arrêter toute consommation de drogues.
- Parmi les adultes non consommateurs de drogues, 5% deviennent des consommateurs.

Un test de dépistage est effectué à un adulte après la session.

On considère les événements :

- A « L'adulte testé est un consommateur de drogues avant la session »
- B « L'adulte testé est un consommateur de drogues à la fin de la session »

1) a) Déterminer :  $p(A)$  ,  $p(\bar{B}/A)$  et  $p(B/\bar{A})$

b) Montrer que :  $p(B) = 0,11$

c) Déterminer la probabilité pour que l'adulte soit un consommateur de drogues avant la session sachant qu'il est consommateur à la fin.

2) Estimer le nombre moyen des adultes consommateurs de drogues dans un groupe de 50 adultes à la fin de la session.

3) On considère un groupe de  $n$  adultes ( $n \geq 1$ ).

a) Exprimer, en fonction de  $n$ , la probabilité  $p_n$  pour qu'il y on a au moins un adulte consommateur de drogues à la fin de la session.

b) Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que :  $p_n \geq 0,95$

### Exercice 04 : (4 points)

1) On considère l'équation (E) :  $13x - 7y = 5$  où  $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

a) Vérifier que le couple (2;3) est une solution particulière de (E)

b) Résoudre l'équation (E)

c) Le plan est rapporté à un repère cartésien  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Déterminer les points de coordonnées entières comprises entre 0 et 30 appartenant à la droite d'équation :  $13x - 7y - 5 = 0$

2) Soit  $n$  un entier vérifiant le système : 
$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{13} \\ n \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$$

Déterminer le reste de la division euclidienne de  $n$  par 91

3) Pour tout entier  $k$ , on pose :  $a = 7k + 2$  et  $b = 13k + 3$  et on note :  $d = a \wedge b$

a) Quelles sont les valeurs possibles de  $d$  ?

b) Montrer que :  $d = 5$  équivaut à  $k \equiv 4 \pmod{5}$

c) Déduire le PGCD des nombres :  $7 \times 2014^{2p+1} + 2$  et  $13 \times 2014^{2p+1} + 3$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$

### Exercice 05 : (3 points)

Le tableau suivant donne l'évolution de la dépense annuelle par personne, exprimée en dinars, tous les cinq ans entre 1970 et 2005.

Période	[1970,1975[	[1975,1980[	[1980,1985[	[1985,1990[	[1990,1995[	[1995,2000[	[2000,2005[
Rang de la période $x_i$	1	2	3	4	5	6	7
Dépense moyenne $y_i$ des dépenses en dinars	147	248	471	716	966	1329	1820

On pose :  $z = \ln y$

1) a) Copier et compléter le tableau suivant de la série statistique  $(x, z)$ .

(On donnera les valeurs arrondies au centième)

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

b) Déterminer les moyennes  $\bar{x}$  et  $\bar{z}$  respectivement de  $x$  et  $z$

c) Construire le nuage des points associé à la série  $(x, z)$  (voir feuille annexe page 5)

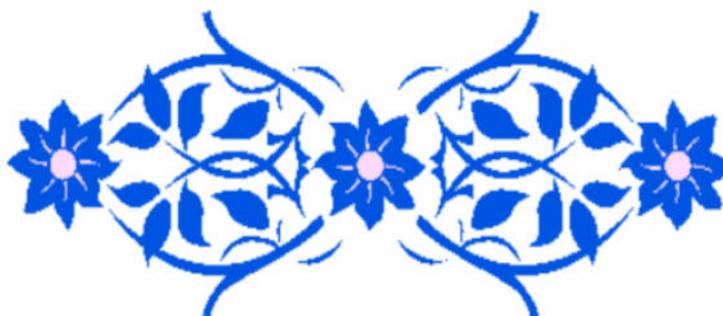
et placer le point moyen  $G(\bar{x}, \bar{z})$

d) Donner une équation de la droite de régression (D) de  $z$  en  $x$ .

(les coefficients  $a$  et  $b$  seront arrondis au centième)

2) a) Vérifier que  $y = 114,43.e^{0,42x}$

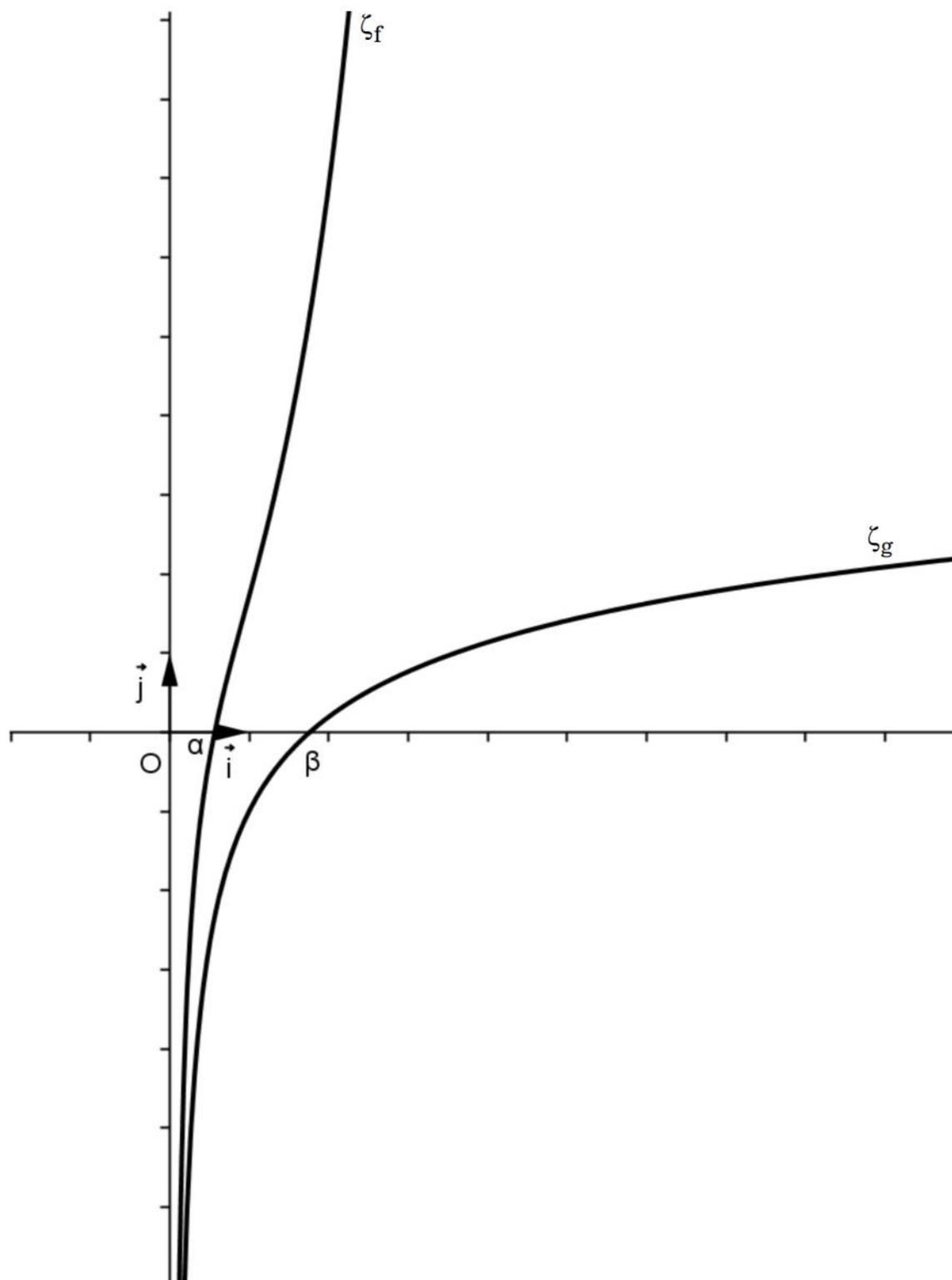
b) Déterminer une estimation de la dépense moyenne, exprimée en dinars, par personne et par **an** pendant la période  $[2010, 2015[$



# ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

Nom.....Prénom:.....Classe:.....

Exercice 01



## Exercise 05

