Lycée ghannouch

4ème Math

Année scolaire : 2012-2013

Epreuve de : Mathématiques Proposé par : Mr Taieb

DEVOIR DE SYNTHESE N°3

Date : Jeudi 9 mai 2013 Durée : 4 heures

N.B : La qualité de la rédaction , la numérotation des pages et le respect de l'ordre des questions , constituent un élément déterminant dans l'appréciation de la copie.

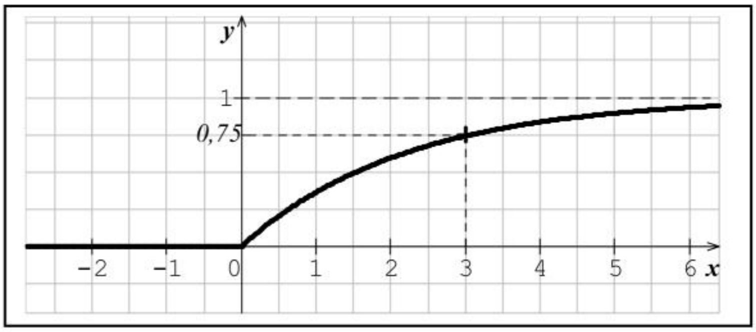
Exercice n°1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La durée d'attente en minutes à la hotline d'un fournisseur d'accès à Internet est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 60].

La probabilité que le temps d'attente soit compris entre 2 minutes et 5 minutes est :

a) $\frac{1}{20}$. b) $\frac{1}{12}$. c) $\frac{1}{30}$.



2. La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager est une variable qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . Le graphique ci-contre représente sa fonction de répartition.

La valeur exacte de λ est alors :

a) $3\ln(0.75)$ b) 1 c) $\frac{2}{3}\ln(2)$

3. Soit f la solution de l'équation différentielle $y'+3y=0$ telle que $f(0)=-1$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 est :

a) 3. b) - 3. c) 0.

4. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\cos(2x)-3\sin(-2x)$;

solution de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ où ω est un réel. Alors ω est égal à :

a) 1. b) 2. c) 3.

Exercice n°2: (4 pts)

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; on constate que chaque article produit par cette entreprise pouvait présenter deux types de défaut :

- Un défaut D_1 avec une probabilité égale à 0,03
- Un défaut D_2 avec une probabilité égale à 0,02

Les deux défauts sont indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts. Soit l'évènement D : « un article est défectueux ».

1- Montrer que $p(D) = 0,0494$.

2- Un commerçant reçoit un lot de 25 articles de cette entreprise.

a) Calculer à 10^{-3} prés, la probabilité qu'il y ait exactement 2 articles défectueux dans ce lot.

b) Calculer à 10^{-3} prés, la probabilité qu'il y ait au moins 1 article défectueux dans ce lot.

c) Déterminer le nombre moyen d'article défectueux dans ce lot.

3- La durée de vie en jours de chaque article fabriqué par l'entreprise est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0007$.

a) Calculer à 10^{-3} prés, la probabilité qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1000 jours

b) Calculer la probabilité qu'un tel article ait une durée de vie égale à 850 jours.

c) Sachant qu'un article a fonctionné plus de 700 jours, quelle est la probabilité qu'il ne tombe pas en panne avant 1000 jours ?

Exercice n°3 : (4 pts)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit S l'ensemble des points M(x ,y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 3 = 0$.

On désigne par P le plan dont une équation cartésienne est $x - y + 3 = 0$.

1. a. Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b. Montrer que S et P sont tangents.

2. Soit f l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M(x, y, z) associe le point M(x', y', z')

tels que : $\begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y - 5 \\ z' = 2z \end{cases}$

a. Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport k.

b. On pose $f(P) = P'$ et $f(S) = S'$. Donner une équation cartésienne du plan P'.

c. Montrer que P' est tangent aux deux sphères S et S'.

3. Soit Q le plan dont une équation cartésienne est $2x + y - 2z - 1 = 0$.

a. Vérifier que $\Omega \in Q$.

b. Montrer que $S \cap Q$ est un cercle dont on précisera le rayon et les coordonnés du centre.

c. Préciser $S' \cap Q$.

Exercice n°4 : (3 pts)

Le tableau suivant donne la distance de freinage d_i(en mètres) d'une voiture en fonction de sa vitesse v_i (en kilomètres par heure)

v_i(km/h)	20	30	40	50	60	70	80	90
d_i(mètres)	36	40	56	74	88	90	100	112

1) Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série (v_i ,d_i) dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

2) Calculer les coordonnées du point moyen G.

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r. Y- a-t-il forte corrélation ?

4) Par la méthode des moindres carrés,déterminer une équation de la droite de régression de D en V et la représenter dans le repère précédent.

5) Calculer la distance de freinage lorsque la voiture roule à 110km/h

Exercice n°5 : (6 points)

A/ On considère l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation

$$(E) : f'(x) - f(x) = (2-x)e^x$$

a- Vérifier que la fonction $g : x \mapsto -\frac{1}{2}(x-2)^2 e^x$ est une solution de (E).

b- Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $(f-g)$ est solution de l'équation différentielle $(E_0) : y' - y = 0$.

c- Résoudre l'équation différentielle (E_0), puis en déduire toutes les solutions de (E).

B/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x$

On appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Dans l'annexe ci-jointe on a représenté $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

a- Dresser le tableau de variation de la fonction f_1 .

b- Identifier alors les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ (nommer les courbes sur le graphique).

2) On définit pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx$

a- Montrer que $I_1 = e^2 - 3$.

b- Etablir que pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$.

c- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

d- Calculer alors l'aire de la partie du plan hachurée dans l'annexe ci-joint.

3) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = e^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$.

Annexe à rendre avec la copie

NOM : …………………………..……………………………………..	PRENOM : ……………………..……………………………………………
CLASSE : ……………………………………………………..…….	NUMERO : ……………………..……………………………………………

Exercice n°5 :