L.P TAHAR HADDAD	**Devoir de synthèse N°3**	**A.S : 2012/2013**
Classe :4ième maths		**Prof : Hajji Makrem**

Exercice N°1 :

Les quatre questions sont indépendantes.

1)a) Vérifier que le couple (4 ; 6) est une solution de l'équation (E) : $11x - 5y = 14$

b) Déterminer tous les couples d'entier relatifs (x ; y) vérifiant l'équation (E) .

2)a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $2^{3n} \equiv 1 \pmod 7$.

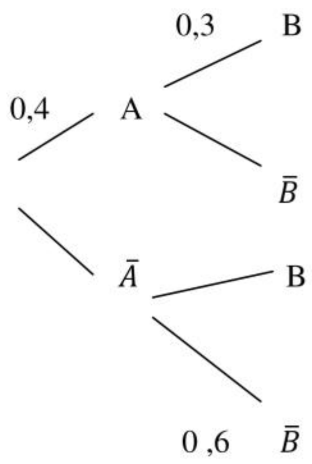
b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

3) On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f qui à tous points M d'affixe z associe le pont M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i$$

4) Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité suivant :

Répondre par vrai ou faux à chacune des informations suivantes en justifiant la réponse :



a) $p(\bar{A}) = 0,6$

b) $p(\bar{B}/A) = 0,7$

c) $p(B) = 0,7$

d) $p(A \cup B) = 0,64$

Exercice N° 2 :

Soit f la fonction définie sur [0 ;+∞[par $f(x) = \sqrt{1-e^{-x}}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1) a- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat

   b- Etudier les variations de f.

   c- Vérifier que pour tout $x > \frac{1}{2}$; $f'(x) < 1$. Montrer que l'équation f(x) admet dans $[\frac{1}{2}; +\infty[$ une unique solution α et que $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$

   d- Tracer le courbe C de f.

2) a- Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle que l'on précisera.

   b- Tracer la courbe C' de g dans le même repère que C.

   c-Expliciter g(x) pour tout x ∈ I ;

3) pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$, on pose $F_n(x) = \int_0^{g(x)} (f(t))^n \, dt$ avec x ∈ [0,1[et $J_n = F_n(\alpha)$.

   a- Montrer que F_n est dérivable sur [0,1[et que $F'_n(x) = \dfrac{2x^{n+1}}{1-x^2}$.

   b- Calculer $F'_{n+2}(x) - F'_n(x) = -\frac{2}{n+2}x^{2n+2}$.

   c- En déduire que pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$, $J_{n+2} = J_n - \frac{2\alpha^{n+2}}{n+2}$.

4) a- Montrer que pour tout x ∈ [0,1[, $F_2(x) = g(x) - x^2$. En déduire que

   $F_2(x) = g(x) - x^2$. En déduire J_2 en fonction de α.

   b- Montrer que pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$: $J_{2n} = \alpha - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{2k}$.

   c- Montrer que pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$, $0 \leq J_n \leq \alpha^{n+1}$, déduire $\lim_{n\to+\infty} J_n$ et

   $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{2k}$.

Exercice N°3 :

Une personne fabrique des appareils électroniques. Elle achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut.

On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à50 tirages indépendants avec remise, en on appelle X le nombre de composants défectueux achetés .

Une personne achète 50 composants.

1) Qu'elle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ?

   Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} prés.

2) Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ?

   Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} prés.

3) Quel est l'espérance de X ?

   Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit loit exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5\ 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2(en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$.

1) calculer la probabilité que la duré de vie d'un composant soit supérieure à 1000 heures :
   a) si se composant est défectueux.
   b) si se composant n'est pas défectueux

Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} prés.

2) Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.
   Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est p (T ≥ t) = $0{,}02e^{-5\times10^{-4}t} + 0{,}98\ e^{-10^{-4}t}$.
3) Sachant que le composé acheté est encore en état de fonctionner 1000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux.

Exercice N°4 :

1) Résoudre l'équation différentielle (E_1) : y'+y=0.
2) Soit l'équation différentielle (E_2): y'+ y = x-1.
   a- On pose g(x) = h(x) e^{-x}. Montrer que g est une solution de (E_2) si et seulement si h'(x) = (x-1) e^{x}.
   b- On suppose que h(1) = 0. En intégrant par partie, calculer $\int_1^x (t-1)e^t\,dt$. En déduire l'expression de h(x).
   c- Montrer qu'une fonction f est une solution de (E_2) si et seulement si f- g est une solution de (E_1) , en déduire les solutions de (E_2).

Exercice N°5 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ et on désigne par M le point de cordonnées ($\cos\theta$, $2\sin\theta$) ou θ est un réel de $]0,\frac{\pi}{2}[$.

1) a- Déterminer par leurs cordonnées les sommets et les foyers de $(\mathcal{E})$

   b- Tracer $(\mathcal{E})$ et placer ses foyers.

   c- Vérifier que le point M appartient à $(\mathcal{E})$.

2) Soit (T) la tangente à $(\mathcal{E})$ en M.

   Montrer qu'une équation de (T) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est $2x\cos\theta+y\sin\theta-2=0$.
3) On désigne respectivement par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées et on désigne par A l'aire du triangle OPQ.
   a- Montrer que $A=\frac{2}{\sin(2\theta)}$.
   b- En déduire que l'aire de A est minimale si et seulement si M est le milieu du segment [PQ].