

<u>Lycées Houmet Souk 1 & 2</u> <u>Profs: Loukil . M & Zayoud . A</u>	<u>Devoir de Synthèse N : 3</u> <u>Durée : 4 Heures</u>	<u>4 Mathématique</u> <u>10 Mai 2012</u>
--	--	---

EXERCICE N : 1 (3 points)

Le tableau ci-dessous, donne la dépense en millions de dinars des ménages en produits informatiques

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang x_i en année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dépense y_i	381	451	523	601	673	753	828	896	964	1039

(les calculs seront arrondis à 10^{-2} près)

A) 1) Construire ,dans un repère orthogonal ,le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ de la série double (X, Y) .

(1 cm pour un rang en abscisse et 1 cm pour 200 millions de Dinars en ordonnée)

2) a) Peut-on justifier un ajustement affine de la série considérée ?

b) Calculer les coordonnées du point moyens G .

3) N_1 désigne le nuage des points M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 . N_2 désigne le nuage des points restants.

a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 associés respectivement à N_1 et N_2

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(G_1 G_2)$ de Mayer .

B) 1) a) Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) .

b) Interpréter le résultat obtenu .

c) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ de régression de Y en X .

2) Donner une estimation par **la méthode de Mayer** puis celle **des moindres carrés** des dépenses de l'année 2012 .

3) En utilisant la méthode **des moindres carrés** , estimer l'année pour laquelle les dépenses dépasseront 1500 millions de Dinars .

EXERCICE N : 2 (3 points)

A) Une urne U_1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2 .

Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1 , 2 , 3 et 4 .

On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne .

1) Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?

2) On a tiré un jeton portant le numéro 1 , quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?

B) On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents.

On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont équiprobables.

1) Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.

2) Soit S la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe la somme des numéros des 2 jetons tirés.

Déterminer la loi de probabilité de S .

C) Deux joueurs, Hazem et Rayen , décident que si la somme des numéros tirés est impair ,

Hazem donne 10 Dinars à Rayen et que dans le cas contraire Hazem reçoit λ Dinars de Rayen .

On note X la variable aléatoire qui , à chaque tirage associe le gain algébrique de Hazem .

1) Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ .

2) Déduire la valeur de λ pour laquelle le jeu soit équitable .

EXERCICE N : 3 (4 points)

Dans un plan orienté , on considère un carré $OABC$ de centre J tel que $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ et $OA = 6$.

Soient M et N les deux points définis par : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{OC}$.

1) a) Caractériser la rotation R qui transforme A en C et M en N .

b) En déduire la nature du triangle BMN .

2) Soit K le milieu du segment $[MN]$

a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S de centre B telle que $S(M) = K$.

b) Déterminer $S(O)$.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(B) = C$ et $\sigma(C) = J$.

a) Déterminer le rapport de σ .

b) En déduire que σ admet un unique point invariant Ω .

c) Caractérise la fonction composée $\sigma \circ \sigma$.

d) Préciser alors le centre Ω de σ et construire son axe Δ .

4) On pose : $\varphi = S \circ \sigma^{-1}$.

a) Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(C)$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ .

EXERCICE N : 4 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

A) Déterminer l'ensemble (\mathcal{C}) des points M , d'affixe Z , du plan tels que $|Z| = 2$.

B) Soit $f: P \setminus \{O\} \longrightarrow P; M_{(Z)} \longrightarrow M'_{(Z')}$ tel que : $Z' = \frac{1}{2} \left(Z - \frac{1}{Z} \right)$ et A le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) Soit N le point d'affixe $-\frac{1}{Z}$.

Montrer que lorsque le point M décrit la demi droite $[OA)$ privé du point O , le point N décrit une demi-droite \mathcal{D} que l'on précisera.

2) On pose : $Z = re^{i\theta}$ où r est un réel non nul et $\theta \in [0; 2\pi[$.

Montrer que : $Z' = \frac{r^2 - 1}{2r} \cos \theta + i \frac{r^2 + 1}{2r} \sin \theta$.

3) Soit M un point de (\mathcal{C}) et $M' = f(M)$.

a) Montrer que M' est un point de la conique (\mathcal{E}) d'équation : $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{25} = \frac{1}{16}$.

b) Donner la nature de (\mathcal{E}) et préciser son centre, ses sommets, ses foyers et ses directrices.

4) a) Montrer que l'image de la demi-droite $[OA)$ privé du point O par la transformation f est une partie d'une conique (\mathcal{H}) d'équation : $12X^2 - 4Y^2 + 3 = 0$.

b) Montrer que (\mathcal{H}) est une hyperbole et donner ses sommets ses foyers et ses asymptotes.

EXERCICE N : 5 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$.

On désigne par (Cf) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $R(O; \vec{i}; \vec{j})$.

A) 1) Dresser le tableau de variation de f .

2) a) Montrer que la droite Δ d'équation : $y = x$ est une asymptote à (Cf) au voisinage de $+\infty$.

b) Déterminer la position de (Cf) par rapport à Δ .

3) Tracer Δ et (Cf) dans le repère R .

4) a) Montrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[\ln 2; +\infty[$.

b) Tracer (Cf^{-1}) dans le même repère R .

B) On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_0 = \int_0^{\ln 2} dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_n = \int_0^{\ln 2} [f'(x)]^n dx$.

1) Déterminer les valeurs exactes de U_0 et U_1 .

2) a) Montrer que pour tout $x \in [0; \ln 2]$ on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{5}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq (\frac{3}{5})^n \ln 2$.

c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3) a) Vérifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) : $(y')^2 = 1 - y''$.

b) Montrer alors, que pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a : $U_n = U_{n-2} - \frac{1}{n-1} (\frac{3}{5})^{n-1}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$U_{2n} = U_0 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} (\frac{3}{5})^{2k-1} \quad \text{et} \quad U_{2n+1} = U_1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} (\frac{3}{5})^{2k}$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $V_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} (\frac{3}{5})^k$.

Montrer que la suite (V_n) converge vers un réel que l'on déterminera .