

Exercice N°1(3points)

Pour chacune des questions suivantes ,repondre par **Vrai** ou **Faux**.Aucune justification n'est demandée

- 1) La fonction $x \mapsto x \ln\left(\frac{x}{e}\right)$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln(x)$
- 2) La valeur moyenne sur $[-1,1]$ de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x \sqrt{1-x^2}}{e^{x^2}}$ est égal à 0
- 3) Le chiffre des unité de 9^{2011} est 9
- 4) L'équation $x^2 \equiv 2[4]$ n'admet pas de solution dans \mathbb{Z}

Exercice N°2(4 points)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du pourcentage des logiciels pirates en Tunisie de 2000 a 2008 .X désigne le rang de l'année et y le pourcentage de logiciels pirates

| Année | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Rang de l'année X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Pourcentage Y | 85 | 78 | 73 | 66 | 57 | 51 | 47 | 44 | 43 |

- 1) Représenter le nuage de points associe a la série statistique (X,Y) dans un repère orthogonal
- 2) Calculer le coefficient de corrélation r. Un ajustement affine est-il fiable ? Si oui, déterminer la droite de régression y en x .donner une estimation du pourcentage de logiciels pirates en 2012
- 3) Les experts cherchent a modaliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points .pour cela, on pose $z=\ln(y)$
 - a) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x .en déduire l'expression de y en fonction de x
 - b) Donner une estimation du pourcentage de logiciels pirates en 2012
- 4) On admet que la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t)=85 e^{-0,093t}$ est une modalisation satisfaisante de l'évolution du pourcentage de logiciels pirates depuis 2000
 - a) Etudier le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$ et construire sa courbe c_f dans le même repère
 - b) Calculer $I = \int_0^8 f(t)dt$.en déduire le pourcentage moyen durant les années de 2000a 2008

Exercice N°3(4points)

- 1) Determiner le PGCD(672,490)
- 2) Montrer que les deux equations (E1) : $672x+490y=14$ et (E2) : $48x+35y=1$ sont equivalentes
- 3) On donne l'équation (E) : $48x+35y=1$
 - a) Determiner un couple d'entier (x_0,y_0) d'entiers relatifs solution de (E)
 - b) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E)
- 4) Soit $a= 35k-8$ et $b= 11-48k$ ou k est un entier relatif
Montrer que si d est un diviseur commun de a et b alors d divise 14

5) Dans l'espace orthonormé munie d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 48 \\ 35 \\ 24 \end{pmatrix}$ et le

point A(-11,35,-13)

- Déterminer l'ensemble (Γ) des points M(x,y,z) de l'espace tel que $\vec{u} \cdot \overline{AM} = 0$
- Soit (D) la droite d'intersection de (Γ) avec le plan d'équation $z=16$. Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle $[-100,100]$

Exercice N°5(4 points)

L'espace est munie d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(2,0,0), B(1,1,0), C(3,2,6) et D la droite passant par A et de vecteur directeur

$\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et Δ la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Montrer que les deux droites sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées
- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
- Vérifier que (ABC) est d'équation : $2x+2y-z-4=0$
- Soit F(2,4,4) et H le projeté orthogonal de F sur (ABC)
 - Déterminer les coordonnées de H
 - Calculer le volume du tétraèdre FABC
 - Déterminer une équation cartésienne du plan P image de (ABC) par l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{2}{3}$

Exercice N°5(5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt[3]{x} e^{-x} \quad \forall x \in [0, +\infty[$

- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu
- Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, on a : $f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x} \right) f(x)$
 - dresser le tableau de variation de f
- Tracer C_f dans un repère orthonormé (unité 3cm)
- On pose $I = \left[\frac{1}{3}, 1 \right]$
 - Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans I une solution unique α
 - Montrer que $f(I) \subset I$
 - A l'aide de la question 3)a) Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$
- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in I$

- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a: $|u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha|$
- c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a: $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$
- d) Montrer que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite
- 7) Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_x^{8x} f(t)dt$
- a) Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$
- b) Donner l'expression de $F'(x)$ et en déduire le sens de variation de F
- c) Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[$ on a: $0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$
- d) En déduire la valeur de la limite de $F(x)$ en $+\infty$
- e) Dresser le tableau de variation de F

*******BON TRAVAIL*******