| Prof : Boufares Amor | Devoir de synthèse N°3 2010 / 2011 | $4^{ème}$ Maths |
| --- | --- | --- |

# ENONCE

## Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et donner sa fonction dérivée $f'$.
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Soit V le volume du solide S engendré par la rotation de $\mathcal{C}$ autour de l'axe des abscisses.
a) Dessiner S
b) Calculer V.

4) Soit g la fonction définie par $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a) Justifier l'existence et la dérivabilité de g sur l'intervalle [0,1].
b) Préciser la valeur de g(0) et calculer g'(x) pour tout x de [0,1].

5) Soit h la fonction définie sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x) = g\,[\sin^2(x)]$.

a) Démontrer que h est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée.
b) En déduire que $\int_0^{\sin^2(x)} \sqrt{t(1-t)}dt = \frac{x}{4} - \frac{\sin(4x)}{16}$.

## Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$.

1) Montrer que f est continue et strictement monotone sur $[6, +\infty[$.
2) En déduire que f admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle I que l'on précisera.
3) Donner le tableau de variation de $f^{-1}$.
4) On pose $h(x) = x^2 - x\sqrt{x^2 - 8} - 12$.
a) Montrer que h ne s'annule pas sur I.
b) Calculer h (3) et en déduire le signe de h sur I.
c) Calculer, pour x dans I, $f^{-1}(x)$.
d) Déterminer la fonction dérivée de $f^{-1}$.

## Exercice 3

Soit U et V deux suites définies sur N par $\begin{cases} U_0 = 1 \quad \text{et} \quad V_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \quad \text{por tout } n \in N \end{cases}$

1) Montrer que la suite $(U_n - V_n)_n$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
2) Montrer que U et V sont deux suites adjacentes.Conclure à la convergence de ces deux suites.
3) Soit T la suite définie sur N par $T_n = 2U_n + 3V_n$.
a) Montrer que T est une suite constante et déterminer cette constante.
b) En déduire la valeur de la limite de U et de V.

## Exercice 4

Soit ABCD un carré de sens direct,I,J,K et L les milieux respectifs des cotés [AB],[BC],[CD] et [DA].On note r le quart de tour direct de centre A et on pose $f = S_{(IK)} o r$ et $g = r o S_{(IK)}$.

1) Justifier que f et g sont des antidéplacements.
2) Déterminer f(A) et f(B) et en déduire que f est une symétrie glissée d'axe (IJ).
3) Déterminer f(I) et en déduire le vecteur de f.
4) Déterminer la nature exacte de gof.
5) a) Soit E le point d'intersection des droites (BC) et (IL).Démontrer que B est le milieu de [JE].
b) Déterminer l'image de E par fog, la nature et les éléments caractéristiques de fog.

**Exercice 5**

Soit le polynôme $P(x) = 6x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 6x - 5$.

1) a) Calculer P (1) et P (5).

b) Montrer que l'équation P(x) = 0 n'a pas de solution dans N.

2) Montrer que si p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même de p et $q^5$.

(On pourra utiliser la décomposition d'un entier naturel en produit fini de nombres premiers).

3) Soit $\frac{p}{q}$ un rationnel mis sous sa forme irréductible.

a) Montrer que si $\frac{p}{q}$ est une solution de P(x) = 0 alors p divise 5 et q divise 6.

b) Montrer qu'une solution de P(x) = 0 ne peut être négative.

c) Déduire de ce qui précède que P(x) = 0 admet une seule solution rationnelle que l'on déterminera.

4) Résoudre, dans le corps des nombres complexes C, l'équation P(x) = 0.

# CORRIGE

**Exercice 1**

1) $D_f = [0,1]$

La fonction $x :\mapsto x(1 - x)$ est une fonction polynôme définie sur [0,1] donc elle est dérivable sur [0,1] de plus elle est strictement positive sur ]0,1[ donc f est dérivable sur ]0,1[ et $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1-x}{\sqrt{x(1-x)}} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et $\mathcal{C}$ admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0.

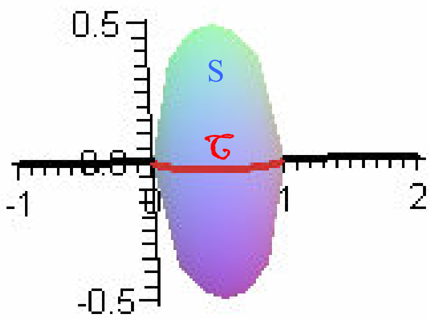
$\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{-x}{\sqrt{x(1-x)}} = -\infty$ donc f n'est pas dérivable à gauche en 1 et $\mathcal{C}$ admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 1.

Conclusion : f est dérivable sur]0,1[et $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}}$

2)

| x | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | \|\| | + | 0 | - | \|\| |
| f(x) | 0 | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | 0 |

3) a)




b) $V = \pi\int_0^1 [f(x)]^2dx = \pi\int_0^1 (-x^2+x)dx = \pi\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$

4) a) f est continue sur [0,1] d'où l'existence de g et sa dérivabilité sur [0,1].

b) g(0) = 0 et $g'(x) = f(x)$.

5) a) La fonction sin² est dérivable sur I et $\sin^2(I) \subset [0,1]$ et g est dérivable sur [0,1] donc h est dérivable sur I.

$$h'(x) = 2\cos(x)\sin(x)f(\sin^2(x)) = 2\cos(x)\sin(x)\sqrt{\sin^2(x)(1-\sin^2(x))} = 2\cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(4x)$$

b) On sait que pour tout x de I, $h'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(4x)$ donc $h(x) = \frac{x}{4} - \frac{\sin(4x)}{16} + k$ or $h(0) = g(0) = 0$ donc $k = 0$

d'où $h(x) = \int_0^{\sin^2(x)} \sqrt{t(1-t)}\,dt = \frac{x}{4} - \frac{\sin(4x)}{16}$.

**Exercice 2**

1) la fonction $x :\mapsto x - 2$ est une fonction polynôme définie sur $[6,+\infty[$ donc elle est dérivable sur $[6,+\infty[$ de plus elle est strictement positive sur $[6,+\infty[$ donc la fonction $x :\mapsto \sqrt{x-2}$ est dérivable sur $[6,+\infty[$ de plus elle ne s'annule pas sur cet intervalle donc f est dérivable sur $[6,+\infty[$ car la fonction $x :\mapsto x$ est aussi dérivable.

$f'(x) = \frac{x-4}{2(x-2)\sqrt{x-2}} > 0$ donc f est strictement croissante sur $[6, +\infty[$.

2) f est continue et strictement croissante sur $[6, +\infty[$ donc f réalise une bijection de $[6, +\infty[$ sur $f([6,+\infty[) = [f(6), \lim_{+\infty} f[ = [3,+\infty[ = I$

3)

| x | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f^{-1}(x)$ | 6 ↗ | $+\infty$ |

4) a) $\begin{cases} h(x) = 0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 12 = x\sqrt{x^2-8} \\ x \geq 3 \end{cases}$

☻ Solutions de $h(x) = 0$ dans l'intervalle $[3,2\sqrt{3}[$ :

si $x \in [3,2\sqrt{3}[$ alors $x^2 - 12 < 0$ donc on ne peut jamais avoir $x^2 - 12 = x\sqrt{x^2-8}$ donc h ne s'annule pas sur $[3,2\sqrt{3}[$.

☻ Solutions de $h(x) = 0$ dans l'intervalle $[2\sqrt{3}, +\infty[$ :

$\begin{cases} h(x) = 0 \\ x \geq 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 12 = x\sqrt{x^2-8} \\ x \geq 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 24x^2 - 144 = x^2(x^2-8) \\ x \geq 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16x^2 - 144 = 0 \\ x \geq 2\sqrt{3} \end{cases}$ impossible donc h ne s'annule pas sur $[2\sqrt{3}, +\infty[$.

Conclusion : h ne s'annule pas sur I.

b) h ne s'annule pas sur I et puisqu'elle est continue sur I donc elle garde un signe constant c à d le signe de h(3) or h(3) = -6 donc h est strictement négative sur $[3, +\infty[$

c) Soit x un réel de I.

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y-2}} = x \Leftrightarrow \frac{y^2}{y-2} = x^2 \Leftrightarrow x^2(y-2) = y^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2y + 2x^2 = 0.$$

$\Delta = x^4 - 8x^2 = x^2(x^2 - 8) > 0$ donc l'équation en y, $y^2 - x^2y + 2x^2 = 0$, admet deux solutions distinctes

$y' = \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-8}}{2}$ et $y'' = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-8}}{2}$ or $y \geq 6$ et comme $h(x) < 0$ donc $\frac{x^2 - x\sqrt{x^2-8}}{2} < 6$

donc $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-8}}{2}$.

d) $f^{-1}$ est dérivable sur I et $(f^{-1})'(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-8} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-8}}$.

**Exercice 3**

1) $U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} - \frac{U_n + 2V_n}{3} = \frac{3U_n + 3V_n - 2U_n - 4V_n}{6} = \frac{U_n - V_n}{6} = \frac{1}{6}(U_n - V_n)$ donc la suite $(U_n - V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $U_0 - V_0 = -1$.

2) On a $U_n - V_n = -\left(\frac{1}{6}\right)^n$ donc $\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$ et $U_n < V_n$

$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + V_n}{2} - \frac{2U_n}{2} = \frac{-U_n + V_n}{2} > 0$ donc la suite U est strictement croissante.

$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 2V_n}{3} - \frac{3V_n}{3} = \frac{U_n - V_n}{3} < 0$ donc V est une suite strictement décroissante.

Conclusion : $\begin{cases} \text{U est une suite croissante} \\ \text{V est une suite décrtoissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0 \end{cases}$ donc les suites U et V sont adjacentes.

U et V sont deux suites adjacentes donc elles convergent vers la même limite L.

3) a) $T_{n+1} - T_n = 2U_{n+1} + 3V_{n+1} - 2U_n - 3V_n = U_n + V_n + U_n + 2V_n - 2U_n - 3V_n = 0$ donc T est une suite constante d'où $T_n = T_0 = 8$.

b) U et V sont deux suites convergentes donc T est convergente d'où 2L + 3L = 8 donc $L = \frac{8}{5}$.

**Exercice 4**

1) f est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc c'est un antidéplacement.Il en est de même pour g.

2) $f(A) = S_{(IK)}[r(A)] = S_{(IK)}(A) = B$ et $f(B) = S_{(IK)}[r(B)] = S_{(IK)}(D) = C$.

Soit Δ l'axe de f alors A*B = I appartient à Δ de même B*C = J appartient à Δ donc Δ = (IJ).

fof(A) = f[f(A)] = f(B) = C donc f n'est pas une symétrie axiale donc c'est une symétrie glissante.

3) Soit $\vec{u}$ le vecteur de f alors $f = S_{(IJ)} o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} o S_{(IJ)}$.

Puisque $f(I) = S_{(IK)}[r(I)] = S_{(IJ)}(L) = J$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{IJ}$.

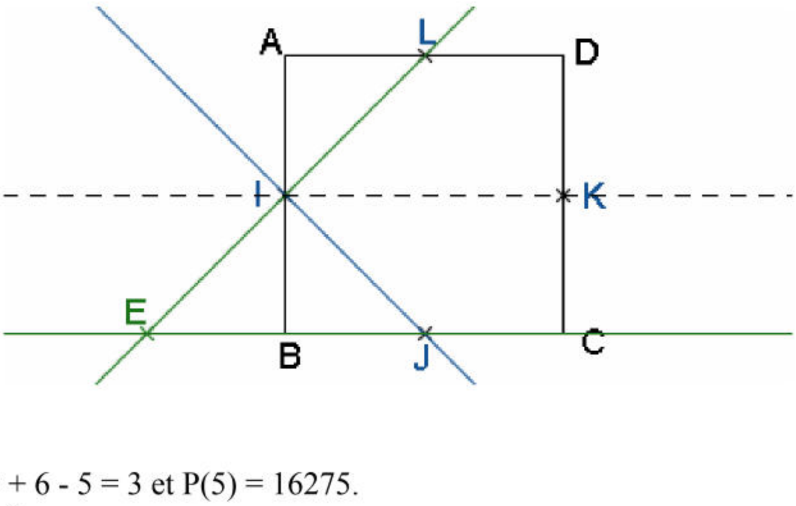
4) $gof = r o S_{(IK)} o S_{(IK)} o r = r o r = R_{\left(A, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = R_{(A,\pi)} = S_A$ : symétrie centrale de centre A.

5) a) Dans le triangle EJL on a (IB) // (LJ) donc d'après Thalès on aura $\frac{\overline{EI}}{\overline{EL}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{EJ}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{LJ}} = \frac{1}{2}$ donc $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EL}$ donc I est le milieu de [EL].

Dans le triangle EIJ on a $\begin{cases} I = E * L \\ (IB)//(LJ) \end{cases}$ donc B = E*J.

b) On pose $S_{(IK)}(E) = E'$ alors $AI = AE'$ et $(\widehat{\overrightarrow{AE'}, \overrightarrow{AI}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $r(E') = I$ or f(I) = J donc fog(E) = J

On constate que fog(B) = f[g(B)] = f(A) = B or fog est un déplacement donc fog est soit l'identité du plan soit une rotation d'où fog est une rotation de centre B et d'angle $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BJ})$ c à d fog est la symétrie centrale de centre B.




**Exercice 5**

1) a) P(1) = 6 - 5 + 6 - 5 + 6 - 5 = 3 et P(5) = 16275.

b) Soit n un entier naturel.

n est une solution de $P(x)=0 \Leftrightarrow 6n^5-5n^4+6n^3-5n^2+6n-5=0 \Leftrightarrow n(6n^4-5n^3+6n^2-5n+6)=5$ donc n est un diviseur de 5 d'où n = 1 ou n = 5 or 1 et 5 ne sont pas solutions de P(x) = 0 donc l'équation P(x) = 0 n'a pas de solution dans N.

2) Soit $p=p_1^{\alpha_1}\times\ldots\times p_i^{\alpha_i}$ la décomposition de p en produit de facteurs premiers et soit $q=q_1^{\beta_1}\times\ldots\times q_j^{\beta_j}$ la décomposition de q en produit de facteurs premiers.

Si p et $q^5$ ne sont pas premiers entre eux alors ils possèdent un diviseur commun d différent de 1 or d doit être le produit des facteurs premiers parmi les facteurs $p_1,\ldots,p_i,q_1,\ldots,q_j$ et par suite p et q ont un diviseur commun différent de 1 ce qui est absurde car p et q sont premiers entre eux.

Conclusion : si p et q sont premiers entre eux alors il en est de même de p et $q^5$.

3) a) $\frac{p}{q}$ est une solution de $P(x)=0 \Leftrightarrow 6\frac{p^5}{q^5}-5\frac{p^4}{q^4}+6\frac{p^3}{q^3}-5\frac{p^2}{q^2}+6\frac{p}{q}-5=0$ donc

$p(6p^4-5p^3q+6p^2q^2-5pq^3+6q^4)=5q^5$ et $q(5p^4-6p^3q+5p^2q^2-6pq^3+5q^4)=6p^5$ or p et q sont premiers entre eux donc p et $q^5$ sont premier entre eux donc p est un diviseur de 5 de même q et $p^5$ sont premiers entre eux donc q divise 6

b) Soit x un réel strictement négatif alors $x^5$ et $x^3$ sont strictement négatifs donc $P(x)<0$ c à d x n'est pas solution de P(x) = 0.

c) Puisque p est un diviseur de 5 et q est un diviseur de 6 alors les valeurs possibles de $\frac{p}{q}$ sont $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6},5,\frac{5}{2},\frac{5}{3}$ et $\frac{5}{6}$ .On sait déjà que 1 et 5 ne sont pas solutions de P(x) = 0 et on a :

| x | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | $-\frac{21}{8}$ | $-\frac{91}{27}$ | $-\frac{1333}{324}$ | $\frac{3705}{8}$ | $\frac{4655}{81}$ | 0 |

donc $\frac{5}{6}$ est la seule solution rationnelle de P(x) = 0.

4) $\frac{5}{6}$ est une solution de $P(x)=0 \Leftrightarrow P(x)=\left(x-\frac{5}{6}\right)\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right) \Leftrightarrow P(x)=$

$ax^5+\left(b-\frac{5}{6}a\right)x^4+\left(c-\frac{5}{6}b\right)x^3+\left(d-\frac{5}{6}c\right)x^2+\left(e-\frac{5}{6}d\right)x-\frac{5}{6}e$ et par identification on aura :

$$\begin{cases} a=6 \\ b-\frac{5}{6}a=-5 \\ c-\frac{5}{6}b=6 \\ d-\frac{5}{6}c=-5 \\ e-\frac{5}{6}d=6 \\ -\frac{5}{6}e=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=0 \\ c=6 \\ d=0 \\ e=6 \end{cases} \text{ donc } P(x)=\left(x-\frac{5}{6}\right)(6x^4+6x^2+6)=(6x-5)(x^4+x^2+1).$$

$P(x)=0 \Leftrightarrow x^4+x^2+1=0$ ou $6x-5=0$.

Résolution de $x^4+x^2+1=0$ :

$$x^4+x^2+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X^2+X+1=0 \end{cases}$$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$ donc l'équation $X^2 + X + 1 = 0$ admet les solutions $X' = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $X'' = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

On a donc $X' = \left[1, -\dfrac{2\pi}{3}\right]$ et $X'' = \left[1, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

$x^2 = \left[1, -\dfrac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow x = \left[1, -\dfrac{\pi}{3}\right] = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$x^2 = \left[1, \dfrac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow x = \left[1, \dfrac{\pi}{3}\right] = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .

Les solutions de $x^4 + x^2 + 1 = 0$ sont $\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Conclusion</u> : les solutions de P(x) = 0 dans C sont : $\dfrac{5}{6}, \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.