Lycée Ebn El haythem Matmata Nouvelle		Devoir contrôle N°4 De mathématiques

Mr. Kayel Moncef	4ème maths	Jeudi 12-04-2018	2Heures

Exercice N°1 : (3pts)

Cocher la bonne réponse

1/ $\lim_{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ est egal à :

a/ 1 b/ $\frac{1}{e}$ c/ e

2/ $\lim_{0^+}(n^n)$ est egal à

a/ e b/ 1 c/ 0

3/l' inverse de6 modulo 11est l' entier x vérifiant

a/ $x \equiv -3[mod11]$ b/ $x \equiv -3[mod6]$ c/ $x \equiv 3[mod11]$

4/ le quotient par la division euclidienne de (-1487) par 11 est

a/ -135 b / -136 c/ -134

Exercice N°2 (3pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^x & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$

1/Montrer que f est continue à droite en 0

2/ étudier la dérivabilité de f à droite en 0

3/dresser le tableau des variations de f

4/Montrer que l' équation $x^x = e$,admet une unique solution strictement positive

Exercice N°3(7pts)

1/ a. Etudier suivant les valeurs de l' entier naturel n le reste de la division euclidienne de 5^n par 11

b/ Montrer que l' entier $(2018)^{2020} - 1$ est divisible par 11

2/ Pour tout entier naturel n ,on pose : $S_n = 1 + 5^2 + 5^3 + \cdots .. + 5^n$

a. Montrer que pour tout l' entier n , on a : $4S_n = 5^{n+1} - 1$

b. Montrer que pour tout entier naturel n ; S_n et 5^n sont premiers entre eux

c. Soit a un entier, montrer que

$$4S_n \equiv a(mod 11) \quad si\ et\ seulement\ si \quad S_n \equiv 3a(mod 11)$$

d. En déduire le reste de la division euclidienne de S_{2018} par 11

e. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que S_n soit divisible par 11

3/Soit n un entier naturel non nul donné. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l' équation : $(E): \ 5^n x + S_n y = 1$

a/Justifier que admet au moins une solution

b/Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l' équation :

4/Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système suivant : $\begin{cases} 25x + 31y = 1 \\ x \equiv y \,(mod 5) \end{cases}$

Exercice N°4(7*pts*)

1/ Soit la fonction f definie sur IR par : $f(x) = e^x - 1 - x$

a. Etudier le sens de variation de puis déduire le signe de $f(x)$

b. Déduire que pour tout réel $x > 0$; $1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$

c. Montrer que pour tout réel $x > 0$ et pout tout entier $n > 1$

$$1 - \frac{1}{nx} \leq e^{-\frac{1}{nx}} \leq 1 - \frac{1}{1+nx}$$

2/Pour $n \in IN^{\circ}$; on pose $U_n = \int_1^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{nt}}\right) dt$ et $V_n = n\, U_n$

a . Montrer que pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n} ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \frac{ln2}{n}$

b . Calculer $\lim_{+\infty} V_n$

3/ n étant un entier naturel non nul, pour tout réel $x \geq 1, on\ pose\ F_n(x) = \int_n^{2n} g(t)dt$

ou g est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = 1 - e^{-\frac{1}{t}}$

a. Vérifier que pour tout réel $x \geq 1$, $F_n'(x) = n\left(1 - e^{-\frac{1}{nx}}\right)$

b. calculer $F_n(1)$ puis deduire que $U_n = \frac{1}{n}\int_n^{2n} g(t)\ dt$

c. interpréter graphiquement les termes de chacune des suites (u_n) et (V_n)