Lycée Takelsa Prof :Mourad Ziadi Classe :4ème Math	Devoir de Contrôle N :3 Epreuve :Mathématiques Date :19/04/2017 | Durée : 2h

Exercice N :1 (03pts) Répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant la réponse.

1) La parabole de foyer F(1,0) et de directrice D : $x=-1$ à pour équation : $x=\frac{1}{4}y^2$.

2) L'ellipse d'équation : $9x^2+4y^2=36$ à pour excentricité $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3) L'entier 5 est un inverse modulo 6 de 5.

Exercice N :2(06pts)

A) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2\ln(x)-x+\frac{1}{x}$.

On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Calculer $f(1)$. En déduire le signe de $f(x)$ pour $x\in]0,+\infty[$.

d) Montrer que $I(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe ζ .

2)a) Tracer la courbe ζ .

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

3) a) Soit $x\in]0,+\infty[$. Montrer que $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

b) En déduire que pour tout $x>0$ on a : $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$

B) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=\sum_{k=1}^{n}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

1) Donner une valeur approchée à 10^{-3} prés de U_3.

2) a) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

b) Vérifier que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n\leq 1-\frac{1}{n+1}$.

d) En déduire que (U_n) est convergente vers un réel ℓ et que $0,7<\ell\leq 1$.

Exercice N :3 (06pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ .On désigne par (H) l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $x^2-y^2-1=0$

1)a) Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers, les sommets, les directrices et les asymptotes.

b) Tracer (H).

2) Soit **A** l'aire de la partie du plan limitée par (H) et la droite d'équation : $x=\sqrt{2}$. Montrer que $\mathbf{A}=2\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{t^2-1}\,dt$.

3) Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^{g(x)}\sqrt{t^2-1}\,dt$. où $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x\geq 0$ on a : $F'(x)=\dfrac{1}{4}e^{2x}+\dfrac{1}{4}e^{-2x}-\dfrac{1}{2}$

b) En déduire $F(x)$ pour tout $x\in[0,+\infty[$.

c) Calculer $g(\ln(1+\sqrt{2}))$. En déduire **A** .

4) Soit $\zeta=\{M(x,y)$ tels que $y=\sqrt[4]{x^2-1}$ et $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$ $\}$ .On désigne par ϑ le volume engendré par la rotation de ζ autour de l'axe des abscisses.

Montrer que $\vartheta=\dfrac{\pi}{8}\left[(1+\sqrt{2})^2-4\ln(1+\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})^{-2}\right]$.

Exercice N :4(05pts)

Soit a un entier naturel tel que $0<a<5$.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel k on a : $a^{4k}-1\equiv 0 \pmod 5$.

b) En déduire suivant l'entier naturel n le reste modulo 5 de 3^n .

c) Déterminer, alors le reste modulo 5 de l'entier $A=2016^{2015}+2017^{2016}+2018^{2017}$.

2) Pour tout entier naturel n on pose : $S_n=\sum_{k=0}^{n}3^k$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $2S_n=3^{n+1}-1$. b) En déduire que S_n et 3^n sont premiers entre eux.

3) a) Soit β un entier .Montrer que $2S_n\equiv\beta \pmod 5 \Leftrightarrow S_n\equiv 3\beta \pmod 5$.

b) En déduire le reste de la division euclidienne de S_{2017} par 5.

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 3^n x+S_n y=1$.

a) Justifier que (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

b) Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x,y) tels que $x=3+kS_n$ et $y=-2-3^n k$. avec $k\in\mathbb{Z}$

c) Résoudre, alors dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ le système suivant : $\begin{cases} 9x+13y=1 \\ x\equiv y \pmod 3 \end{cases}$