

EXERCICE N° 1( 8 points )

1) Soit l'équation différentielle ( E ) :  $( 1 + e^{2x} )y' - y = 0$  . On pose :  $z = \sqrt{1 + e^{2x}} \cdot y$

a) Montrer que y est solution de ( E ) si et seulement si z est solution de l'équation (E') :  $z' - z = 0$

b) Résoudre l'équation ( E ).

2) Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$  et  $\varphi(x) = f(x) - x$ .

a) Vérifier que f est une solution de ( E ) et étudier ses variations.

c) Montrer que  $(\xi_f)$  admet un point d'inflexion qu'on déterminera puis la tracer .

3) a) Montrer que f est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle J à préciser.

b) Donner l'expression de  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ .

4) Montrer que :  $\varphi(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ]\ln 2; 1[$ .

5) a) Calculer  $I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} \ln \left( \frac{x^2}{1-x^2} \right) dx$  ; ( En remarquant que :  $\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$  et à l'aide d'une intégration par parties).

b) En déduire l'aire K entre les courbes de f et  $f^{-1}$  et les axes du repère.

6) Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n) \forall n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n < \alpha$  .

b) Montrer que  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite.

c) Soit  $V_n = \frac{1}{\alpha - u_n} \int_{u_n}^{\alpha} f(x) dx$ . Montrer que :  $u_{n+1} \leq V_n \leq \alpha$  et en déduire sa limite.

7) Soit  $F$  la fonction définie sur  $] -1; 1[$  par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_0^{g(x)} f(t) dt \\ F(0) = -\ln(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

a) Montrer que  $F$  est paire et qu'elle est dérivable sur  $]0; 1[$  et calculer  $F'(x)$ .

b) Calculer  $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  et déduire l'expression de  $F(x)$  pour tout  $x \in ]0; 1[$ .

c)  $F$  est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

d) Calculer  $F(\alpha)$  et retrouver l'aire  $K$  et tracer la courbe de  $F$ .

#### EXERCICE N° 2 ( 4 points )

Soit la fonction  $g$  définie sur  $[0; 2]$  par :  $g(x) = 2 \cdot \sqrt{2x - x^2}$  et  $(C)$  sa courbe dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1) Soit  $(C')$  la courbe symétrique de  $(C)$  par rapport à  $(O; \vec{i})$  et  $\Gamma = C \cup C'$ .

a) Montrer que  $\Gamma$  a pour équation  $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ .

b) Donner une équation de la tangente à  $\Gamma$  au point  $A(1; 0)$ .

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $\Gamma$  et la tracer.

2) Soit pour tout  $x \in [0; \pi]$ ,  $G(x) = \int_0^{1+\cos(x)} g(t) dt$ .

Montrer que  $G$  est dérivable sur  $[0; \pi]$  et que  $G'(x) = -2\sin^2(x)$ .

3) a) Calculer  $G(\pi)$  et en déduire l'expression de  $G(x)$  pour tout  $x \in [0; \pi]$ .

b) En déduire l'aire de l'intérieur de  $\Gamma$ .

**EXERCICE N° 3( 4 points )**

1) a) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $7x - 3y = 1$  . ( E )

b) Montrer que si le couple  $( x ; y )$  est solution de l'équation ( E ) alors  $x \wedge y = 1$  .

2) Soit a et b deux entiers relatifs vérifiant la relation (E' ) :  $7a - 3b = 29$ .

a) Soit  $D = a \wedge b$ . Montrer que :  $D = 1$  ou  $D = 29$  .

b) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $7a - 3b = 29$  dans le cas où  $D = 29$ .

c) Soit  $M = \vee b$  . Résoudre l'équation  $7a - 3b = 29$  dans le cas où  $D = 29$  et  $M = 1044$ .

3) Résoudre l'équation  $7a - 3b = 29$  sachant que a et b sont premiers entre eux.

**EXERCICE N° 4 ( 4 points )**

L'espace  $(\xi)$  étant rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points  $A(2 ; 0 ; 0)$ ,  $B(1 ; 1 ; 0)$  et  $C(3 ; 2 ; 6)$ .

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  passant par  $F(2 ; 4 ; 4)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

b) Montrer que  $\Delta$  est perpendiculaire au plan ( ABC ).

c) En déduire les coordonnées de H projeté orthogonal de F sur (ABC).

d) Calculer le volume du tétraèdre FABC.

3) Donner une équation de la sphère S de centre F et tangente à (ABC).

4) Soit  $S'$  l'image de la sphère S par l'homothétie h de centre A et de rapport  $k = -3$ .

Montrer que  $S'$  et (ABC) sont tangents.