

EXERCICE N° 1(8 points)

1) Soit l'équation différentielle (E) : $(1 + e^{2x})y' - y = 0$. On pose : $z = \sqrt{1 + e^{2x}} \cdot y$

a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation (E') : $z' - z = 0$

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ et $\varphi(x) = f(x) - x$.

a) Vérifier que f est une solution de (E) et étudier ses variations.

c) Montrer que (ξ_f) admet un point d'inflexion qu'on déterminera puis la tracer .

3) a) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} vers un intervalle J à préciser.

b) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

4) Montrer que : $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]\ln 2; 1[$.

5) a) Calculer $I = \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} \ln \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right) dx$; (En remarquant que : $\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$ et à l'aide d'une intégration par parties).

b) En déduire l'aire K entre les courbes de f et f^{-1} et les axes du repère.

6) Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n) \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n < \alpha$.

b) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

c) Soit $V_n = \frac{1}{\alpha - u_n} \int_{u_n}^{\alpha} f(x) dx$. Montrer que : $u_{n+1} \leq V_n \leq \alpha$ et en déduire sa limite.

7) Soit F la fonction définie sur $] -1; 1[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_0^{g(x)} f(t) dt \\ F(0) = -\ln(1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

a) Montrer que F est paire et qu'elle est dérivable sur $]0; 1[$ et calculer $F'(x)$.

b) Calculer $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et déduire l'expression de F(x) pour tout $x \in]0; 1[$.

c) F est elle continue en 0 ? Est elle dérivable en 0 ?

d) Calculer $F(\alpha)$ et retrouver l'aire K et tracer la courbe de F.

EXERCICE N° 2 (4 points)

Soit la fonction g définie sur $[0; 2]$ par : $g(x) = 2 \cdot \sqrt{2x - x^2}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Soit (C') la courbe symétrique de (C) par rapport à $(O; \vec{i})$ et $\Gamma = C \cup C'$.

a) Montrer que Γ a pour équation $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

b) Donner une équation de la tangente à Γ au point A(1 ; 0).

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de Γ et la tracer.

2) Soit pour tout $x \in [0; \pi]$, $G(x) = \int_0^{1+\cos(x)} g(t) dt$.

Montrer que G est dérivable sur $[0; \pi]$ et que $G'(x) = -2\sin^2(x)$.

3) a) Calculer $G(\pi)$ et en déduire l'expression de $G(x)$ pour tout $x \in [0; \pi]$.

b) En déduire l'aire de l'intérieur de Γ .

EXERCICE N° 3(4 points)

1) a) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation : $7x - 3y = 1$. (E)

b) Montrer que si le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation (E) alors $x \wedge y = 1$.

2) Soit a et b deux entiers relatifs vérifiant la relation (E') : $7a - 3b = 29$.

a) Soit $D = a \wedge b$. Montrer que : $D = 1$ ou $D = 29$.

b) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation : $7a - 3b = 29$ dans le cas où $D = 29$.

c) Soit $M = \vee b$. Résoudre l'équation $7a - 3b = 29$ dans le cas où $D = 29$ et $M = 1044$.

3) Résoudre l'équation $7a - 3b = 29$ sachant que a et b sont premiers entre eux.

EXERCICE N° 4 (4 points)

L'espace (ξ) étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(2 ; 0 ; 0)$, $B(1 ; 1 ; 0)$ et $C(3 ; 2 ; 6)$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par $F(2 ; 4 ; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

c) En déduire les coordonnées de H projeté orthogonal de F sur (ABC).

d) Calculer le volume du tétraèdre FABC.

3) Donner une équation de la sphère S de centre F et tangente à (ABC).

4) Soit S' l'image de la sphère S par l'homothétie h de centre A et de rapport $k = -3$.

Montrer que S' et (ABC) sont tangents.