

<i>L. Regueb</i>	<b>Mathématiques</b>	<i>Classe : 4<sup>ème</sup> M</i>
<i>Prof : Salhi Noureddine</i>	<i>Devoir de Contrôle N°3</i>	<i>Le: 16/04/2016 D: 2h</i>

### Exercice 1 (6pts)

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose :  $A(n) = n^4 + 1$ .

- 1) Etudier la parité de l'entier  $A(1111111)$ .
- 2) Montrer que, quel que soit l'entier  $n$ ,  $A(n)$  n'est pas un multiple de 3.
- 3) Montrer que pour tout entier  $d$  diviseur de  $A(n)$  on a :  $d$  et  $n$  sont premiers entre eux.
- 4) Montrer que pour tout entier naturel  $d$  diviseur de  $A(n)$  on a :  $n^8 \equiv 1 [d]$ .

### Exercice 2 (6pts)

On admettra qu'il existe une fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  vérifiant :  $f(x) = x - 2 \int_1^x f(t) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- 1) Calculer  $f(1)$ .
- 2) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  puis montrer que  $f$  vérifie une équation différentielle du premier ordre que l'on précisera.
- 3) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \frac{1+e^{2-2x}}{2}$ .
- 4) On note  $(C_f)$  la courbe de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
( on ne demande pas de tracer  $(C_f)$  ).

Calculer en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C_f)$  et les droites d'équations  $x = 1$ ,  $x = 2$  et  $y = 0$ .

### Exercice 3 (8pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient les points  $A(2,0,0)$ ;  $B(1,1,0)$  et  $C(3,2,6)$ .

- 1) a) Calculer l'aire du triangle ABC.  
b) Déterminer une équation du plan P passant par les points A, B et C.
- 2) Soit la droite  $\Delta$  passant par le point  $F(2, 4, 4)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .  
a) Montrer que  $\Delta$  est perpendiculaire à P puis donner une représentation paramétrique de  $\Delta$ .  
b) En déduire les coordonnées du point H le projeté orthogonal de F sur le plan P.  
c) Calculer le volume du tétraèdre FABC.  
d) Donner une équation cartésienne de la sphère S de centre F et tangente au plan P.
- 3) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport  $-3$ .

Déterminer le centre et le rayon de la sphère  $S'$  image de S par h, puis montrer que P et  $S'$  sont tangents.