

❖ **Exercice n°1 :** (5 pts)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soient les points $A(2,0,0)$; $B(1,1,0)$ et $C(3,2,6)$.

- Calculer l'aire du triangle ABC.
 - Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les points A, B et C.
- Soit la droite Δ passant par le point $F(2,4,4)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 - Montrer que Δ est perpendiculaire à P puis donner une représentation Paramétrique de Δ .
 - En déduire les coordonnées du point H le projeté orthogonal de F sur le plan P .
 - Calculer le volume du tétraèdre FABC
 - Donner une équation cartésienne de la sphère de centre F et tangente au plan P
- Soit h l'homothétie de centre A et de rapport -3
Déterminer le centre et le rayon de la sphère S' l'image de S par h , puis montrer que P et S' sont tangents.

❖ **Exercice n°2 :** (5points)

- On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) : $91x + 10y = 1$.
 - Enoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution de l'équation (E).
 - Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$
 - Résoudre (E').
- Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8.
- On considère l'équation (E'') : $A_3x + A_2y = 3296$.
 - Déterminer les couples entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E'').
 - Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

❖ **Exercice n°3 :** (4 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , soit la courbe (E_m) d'équation :

$$\frac{x^2}{(m+1)^2} + \frac{y^2}{m+1} = 1 \quad (m \text{ est un paramètre réel strictement positif}).$$

- Montrer que (E_m) est une ellipse dont on précisera les sommets et les directrices.
 - Construire (E_3) .
 - Vérifier que le point $M \left(\frac{(m+1)}{2}; \frac{\sqrt{3(m+1)}}{2} \right)$ appartient à (E_m) .
- Soit S le sommet principal d'abscisse positive et B le sommet secondaire d'ordonnée positive de (E_m) . La droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par M coupe le segment $[SB]$ en un point K .
 - Montrer que les coordonnées de K sont $\left(\frac{(m+1)}{2}; \frac{\sqrt{m+1}}{2} \right)$.
 - En déduire que K appartient à la parabole P dont une équation est : $y^2 = \frac{1}{2}x$.
 - Déterminer le foyer et la directrice de P , puis construire P dans le même repère.

❖ **Exercice n°4** : (6 pts)

On donne ,dans la feuille Annexe, ci jointe , (C) la courbe représentative dans un repère orthonormé

(O, \vec{i}, \vec{j}) de la fonction réciproque f^{-1} d'une fonction f continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$. La courbe (C) admet les droites d'équations $y = x$ et $y = 0$ comme asymptotes et coupe l'axe des ordonnées en $A(0, \ln(2))$

1.) a. Par lecture graphique déterminer : $f^{-1}(0)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} [y - f(y)]$

b. En déduire : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c. Tracer la courbe (C') de f , dans le même repère (O, I, J) que (C) , sur la feuille ANNEXE

2.) En réalité on connaît que : $f^{-1}(x) = \ln(e^{ax} + b)$, où a et b sont des réels strictement positifs.

a. Vérifier que $f^{-1}(x) = a \cdot x + \ln(1 + be^{-ax})$, pour tout réel x strictement positif.

b. Montrer que $a = b = 1$.

c. En déduire que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

3.) On considère la suite (I_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^n e^{-x} \ln(e^x - 1) dx$.

a. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

b. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^n x e^{-x} dx$.en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

$$0 \leq I_n \leq -(n+1)e^{-n} + \frac{2}{e}$$

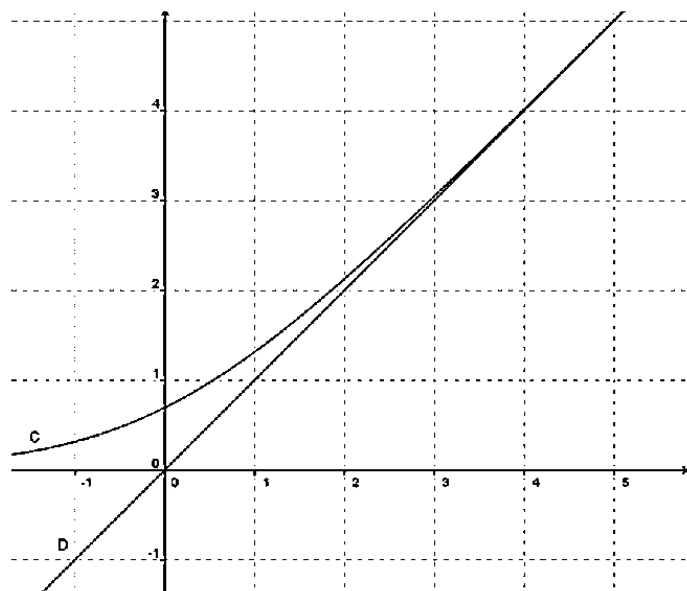
c. Montrer que la suite (I_n) est convergente.

4.) a. Vérifier que : $\forall x \neq 0$; $\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1} - 1$

b. Montrer en s'aidant d'une intégration par parties que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \left(1 - \frac{1}{e^n}\right) \ln(e^n - 1) - n + \left(\frac{1}{e} - 1\right) \ln(e - 1) + 1$$

c. En déduire la limite de I_n , lorsque n tend vers $+\infty$.



Annexe : Exercice 4

