

EXERCICE N 1

5 points

1. (a) Déterminer les restes possibles de la division de $2; 2^2; 2^3 \dots$ et 2^n ($n \in \mathbb{N}$) par 9
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $2^{2n}(2^{2n+1} - 1) - 1 \equiv 0 \pmod{9}$
- (a) Soit p un nombre premier. Et on suppose que $p \geq 5$. montrer que $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ et $2^p \equiv 2 \pmod{3}$ et déduire que $p^2 + 2^p$ n'est pas premier.
- (b) Montrer que $p^2 + 2^p$ est premier alors $p = 3$
- (c) Montrer que si p divise $p^2 + 2^p$ alors $p = 2$.

EXERCICE N 2

6 points

n un entier naturel non nul .

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$ et (ζ_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$
 - (a) Etudier la branche infinie de (ζ_n) au voisinage de $-\infty$
 - (b) Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$. Etudier la position de (ζ_n) par rapport à D
2. Dresser le tableau de variation de f_n et construire (ζ_3) (on prend $f_3(-1.5) \approx 0; f_3(-0.6) \approx 0; \ln 3 \approx 1.1$)
 - (a) Montrer que pour tout $n \geq 3$ on a : $\frac{e}{n} \leq \ln n$
 - (b) Montrer que pour tout $n \geq 3$ l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions x_n et y_n avec $x_n \leq y_n, x_n \leq -\ln n$ et $-\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0$
 - (c) Calculer $\lim x_n$ et $\lim y_n$
3. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $\begin{cases} g(x) &= -1 - x \ln x ; x > 0 \\ g(0) &= 1 \end{cases}$
 - (a) Montrer que g est continue à droite en 0
 - (b) Vérifier que pour tout $n \geq 3; g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$ et déduire $\lim \frac{\ln n}{x_n}$.

EXERCICE N 3

5 points

Une urne contenant trois boules noires numérotées 1; 2; 2 et deux boules blanches numérotées 1; 1, toutes les boules sont indiscernables au toucher

1. On tire simultanément deux boules de l'urne
 - (a) Déterminer la probabilité d'avoir deux boules de même couleur
 - (b) sachant que les boules tirées sont de même couleur, calculer la probabilité qu'elles sont de même numéro
2. Maintenant ; on tire les boules une à une sans les remettre. On désigne par X le rang de la deuxième boule blanche tirée
 - (a) Donner la loi de X
 - (b) représenter la fonction de répartition F_X
 - (c) Calculer $E(X)$ et $Var(X)$

EXERCICE N 4

4 points

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = \frac{2e^{-x}}{1 + 2e^x}$

1. Vérifier que la fonction f est une solution de (E) tel que pour tout x de $\mathbb{R} : f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$
2. Montrer qu'une fonction φ solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est une solution de l'équation différentielle $(E') : y' + 2y = 0$
3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) .

bon couragesujet traité par \LaTeX