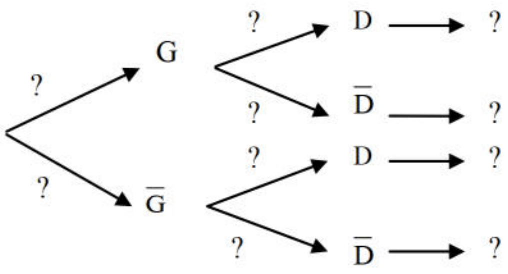
L.Ibn Khaldoun Jammel	**Devoir de Contrôle n°3**	Mr :Afli Ahmed
4èmeM	Mathématiques	Le 20/04/2015

❖ Exercice n°1 : (4 pts)

Dans un atelier de couture on sait que 20% des machines sont sous garantie.
Parmi les machines sous garantie 1% sont défectueuses.
Parmi les machines qui ne sont pas sous garantie 10% sont défectueuses.
On considère les évènements suivants :

G : « La machines est sous garantie »
D : « La machine est défectueuse »



1) On choisit une machine au hasard.
 a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre
 b. Déterminer la probabilité pour que la machine soit sous garantie et défectueuse.

2) a. Déterminer la probabilité pour que la machine soit défectueuse.
 b. La machine est défectueuse, calculer la probabilité pour qu'elle soit sous garantie.

3) On choisit successivement et au hasard 5 machines.
 Calculer la probabilité des évènements suivants :
 A : « Seule la deuxième machine est sous garantie »
 B : « Obtenir au moins deux machines sous garantie »

4) Soit X la variable aléatoire indiquant la durée de vie d'une machine en années.
 On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.25$. Cocher la réponse exacte :
 a. La probabilité que la machine dure plus de 4 ans est :
 $\boxed{x}$ $1-e^{-1}$; $\boxed{y}$ e^{-1} ; $\boxed{z}$ $e^{-1}-1$
 b. La probabilité que la machine dure moins de 8 ans sachant qu'elle a duré plus que 4 ans est égale $\boxed{x}$ $1-e^{-1}$; $\boxed{y}$ e^{-1} ; $\boxed{z}$ $e^{-1}-1$

❖ Exercice n°2 : (5 pts)

1) Vérifier que $5^6 \equiv 1 \pmod 7$; En déduire $5^{2014} \equiv 2 \pmod 7$.

2) Pour tout entier naturel n on pose : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 5^n$.
 a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $4\,S_n = 5^{n+1} - 1$.
 En déduire que S_n et 5^n sont premiers entre eux.
 b. Soit a un entier, montrer que : $4\,S_n \equiv a \pmod 7$ **si et seulement si** $S_n \equiv 2\,a \pmod 7$.
 c. Montrer que : $4\,S_{2013} \equiv 1 \pmod 7$; En déduire le reste modulo 7 de S_{2013} .
 d. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que S_n soit divisible par 7 .

3) Soit n un entier naturel non nul donné .On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

$$(E) : 5^n x + S_n y = 1 .$$

 Vérifier que $(5 ; -4)$ est une solution de (E) puis résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) .

❖ **Exercice n°3 :** (5 pts)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Soient les points A(2,0,0) ; B(1,1,0) et C(3,2,6)

1.) a. Calculer l'aire du triangle ABC.
b) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les points A, B et C.

2.) Soit la droite Δ passant par le point F (2,4,4) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

a. Montrer que Δ est perpendiculaire à P puis donner une représentation Paramétrique de Δ.
b. En déduire les coordonnées du point H le projeté orthogonal de F sur le plan P.
c. Calculer le volume du tétraèdre FABC
d. Donner une équation cartésienne de la sphère de centre F et tangente au plan P

3.) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport -3
a. Déterminer le centre et le rayon de la sphère S ' l'image de S par h ,
b. Montrer que P et S ' sont tangents.

❖ **Exercice n°4** :(6points)

1) a. Résoudre l'équation différentielle (E) $y' = 2y + 2$

b. Soit l'équation différentielle (E′) $y' = y + 2e^{-x}$,

Montrer que : f est une solution de(E′) **si et seulement si** la fonction g définie

par $g(x) = e^{x} f(x)$ est une solution de (E)

c. Déterminer alors la fonction f solution de (E′) telle que $f(0) = 0$

2) Soit la fonction F définie sur IR par $F(x) = \int_0^{u(x)} \sqrt{4+t^2}\, dt$ tel que $u(x) = e^{x} - e^{-x}$

a. Montrer que F est dérivable sur IR et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in$ IR

b. En déduire que pour tout x de IR on a $F(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) + 2x$

c. En intégrant par parties, calculer en fonction de x, l'intégrale $\int_0^{U(x)} \frac{t^2}{\sqrt{4+t^2}} dt$

3) Soit h la fonction définie sur IR par $h(x) = \sqrt{4+x^2}$ et C sa courbe représentatative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Résoudre dans IR l'équation $u(x) = 2$

b. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C , l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x = 0$ et $x = 2$