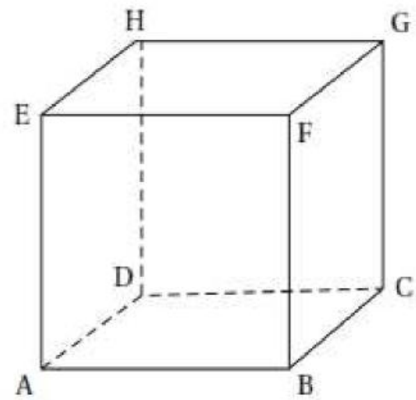
L. Regueb	Mathématiques	Classe : $4^{ème}$M
Prof : Salhi Noureddine	Devoir de Contrôle №3	Le : 19/04/2013 D: 2h

Exercice1(8pts)



On considère le cube ABCDEFGH de coté 1 représenté ci-contre .

Dans tout l'exercice , l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$.

On note K le barycentre des points pondérés $(D, 1)$ et $(F, 2)$.

I) 1) Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

2) Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales .

3) Calculer la distance EK .

II) Soit M un point du segment [HG] . On note , $m = HM$.

(m est donc un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$).

1) Montrer que , pour tout réel $m \in [0\,;1]$, le volume du tétraèdre EMFD , en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.

2) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est : $(m-1)x + y - mz = 0$.

3) On note d_m la distance du point E au plan (MFD) .

a) Montrer que pour tout réel $m \in [0\,;1]$, $d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

b) Déterminer la position de M sur le segment [HG] pour laquelle la distance d_m est maximale .

c) En déduire que lorsque la distance d_m est maximale , le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD) .

Exercice2(5pts)

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$(E): y' + (1+\tan(x))y = \cos(x)$; $(E_0): y' + y = 1$.

1) Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) .

2) Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x)\cos(x)$.

Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0)

3) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

Exercice3(7pts)

Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes .

1) Si l'on divise un entier a par 18 , le reste est 13 . Quel est le reste de la division de a par 6 ?

2) Déterminer les entiers relatifs n tel que : $n + 1$ divise $3n - 4$.

3) Montrer que si un entier n n'est pas multiple de 7 alors $(n^6 - 1)$ est un multiple de 7 .

4) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, le nombre $2^{2n} + 6n - 1$ est divisible par 9 .

5) On divise un entier naturel n par 137 et 143 . Les quotients sont égaux et les restes sont respectivement 131 et 5 . Quel est cet entier n ?

6) On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$

Soit n un entier naturel . Discuter suivant les valeurs de n , le reste de 7^n modulo 100.

En déduire que $a + 1$ est un multiple de 100 .