Exercice 1 *(3 points)*

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Toute trace de recherche sera valorisée.

1. Soit l'équation différentielle $(E) : y' - y = 2xe^x$.
   Affirmation : La fonction $h : x \longmapsto x^2e^x$ est une solution de (E).
2. f étant une solution de l'équation différentielle $(E) : y' = 2y + 1$ telle que $f(0) = 1$.
   Affirmation : La tangente au point $\mathrm{A}(0, 1)$ a pour équation $y = 3x + 1$.
3. Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + y' = 0$.
   Affirmation : Les solutions de (E) sont les fonctions $f : x \longmapsto ke^{-x} + k'$ avec $k, k' \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 *(5 points)*

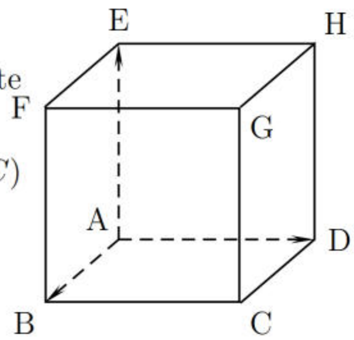
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit $\mathcal{H}$ la courbe d'équation $\mathcal{H} : 16x^2 - 9y^2 - 32x - 128 = 0$.

1. (a) Montrer que : $16x^2 - 9y^2 - 32x - 128 = 0 \iff \dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.
   (b) En déduire que $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont on précisera le centre Ω.
2. On désigne par F le foyer de $\mathcal{H}$ d'abscisse positif et par $\mathscr{D}$ la directrice associée à F.
   (a) Déterminer :
   - ✔ les coordonnées du foyer F et des sommets S et S'.
   - ✔ Les équations des asymptotes Δ et Δ' et de la directrice $\mathscr{D}$.
   - ✔ L' excentricité e.

   (b) Construire $\mathcal{H}$.
3. Vérifier que le point $A(7, 4\sqrt{3}) \in \mathcal{H}$.
4. La tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{H}$ au point $A(7, 4\sqrt{3})$ coupe la directrice $\mathscr{D}$ en un point K.
   (a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{T}$.
   (b) Montrer que le triangle AFK est rectangle en F.

Exercice 3 *(5 points)*

L'espace est orienté dans le sens direct. ABCDEFGH est un cube d'arête 1 et J est le milieu de [AB].
Le plan $\mathscr{P}$ passant par J et parallèle au plan (ACF) coupe la droite (BC) en K.
Soit h l'homothétie de centre B et qui transforme A en J.



1. Déterminer le rapport de h.
2. (a) Déterminer l'image par h du plan (ACF).
   (b) Déduire que h(C)=K.

3. On muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.
   (a) Calculer $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF}$ puis déduire qu'une équation cartésienne du plan (ACF) est $x - y - z = 0$.
   (b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ACFH.
   (c) En déduire le volume $\mathcal{V}'$ du tétraèdre image du tétraèdre ACFH par l'homothétie h.
4. Soit (S) la sphère de centre B et passant par D. Montrer que le plan (ACF) coupe (S) suivant un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre ω et le rayon r.

Exercice 4 *(7 points)*

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$ et on désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$(unité 2 cm).

1. (a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
   (b) Étudier les variations de f sur $]-\infty, 0]$.
2. (a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $[0, 1[$.
   (b) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, $f^{-1}(x) = \ln(1 - x^2)$.
4. (a) Vérifier que pour tout $x \in [0, 1[$, $\dfrac{x^2}{1 - x^2} = -1 + \dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{x}{1 - x^2}$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{1 - x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$.
5. (a) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ln\left(1 - x^2\right)\ dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2 - \sqrt{2} + 2\ln\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

   (b) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ et les droites d'équations respectives : $y = -\ln 2$, $x = 0$ et $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Montrer que $\mathscr{A} = \left(\ 8\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) - 4\sqrt{2}\ \right)\ cm^2$.
   (c) Déduire alors $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} \sqrt{1 - e^x}\, dx$.