

Une grande importance sera attachée à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation

EXERCICE1 (3pts) :

Cocher la réponse exacte :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) La parabole de foyer $F(0;2)$ et de directrice $D: y = -2$ a pour équation :

a) $x^2 = 8y$

b) $y^2 = 8x$

c) $x^2 = 4y$

2) Soit (H) l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = -1$, alors (H) d'axe focal :

a) $\Delta: y = -x$

b) $(O\vec{j})$

c) $(O\vec{i})$

3) La courbe d'équation $x^2 + 4y^2 = 1$ est une ellipse de centre O et de foyers :

a) $F(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$ et $F'(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$

b) $F(0; \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $F'(0; -\frac{\sqrt{3}}{2})$

c) $F(0; \sqrt{3})$ et $F'(0; -\sqrt{3})$

4) La courbe d'équation $\left| \frac{x^2}{4} - 1 \right| = y^2$ est :

a) La réunion de deux hyperboles

b) Une hyperbole

c) La réunion d'une hyperbole et d'une ellipse

EXERCICE2 (3,5pts) :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = 2xe^x$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' - y = 0$.

2)a) Soit $f(x) = (ax^2 + 1)e^x$. Déterminer le réel a pour que f soit solution de (E).

b) Soit g une fonction dérivable sur IR. Montrer que g est solution de (E) \Leftrightarrow g - f est solution de (E')

c) Résoudre alors l'équation (E).

3) Soit h une solution de (E) vérifiant $h(x) \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $\varphi(x) = \frac{1}{h(x)}$.

a) Montrer que φ est une solution de l'équation différentielle (E'') : $y' + y + 2xe^x y^2 = 0$.

b) Déterminer alors la solution de l'équation (E'') qui vaut 1 en 0.

EXERCICE3 (4pts) :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Soit (P) l'ensemble des points M(x ;y) tels que : $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

Montrer que (P) est une parabole dont on précisera le foyer F et la directrice (D).

2) Soit $A(x_0; 1)$ un point de (P) avec x_0 positive.

a) Calculer x_0 puis écrire une équation de la tangente (T) à (P) en A.

b) Tracer (T) et (P) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

c) Soit A' le projeté orthogonal de A sur (D). La droite (T) coupe l'axe focal de (P) en un point B.

Déterminer les coordonnées des points A' et B puis montrer que les droites (AF) et (BA') sont parallèles.

3) Soit (H) l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $x^2 - 3y^2 = 6$.

a) Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera ses foyers et ses sommets.

b) Montrer que (T) est la tangente à (H) en A.

c) Déterminer les asymptotes de (H) puis la tracer dans le même repère.

EXERCICE4 (4pts) :

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1) On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? (expliquer).

b) Quelle est son espérance et son écart type ?

c) Calculer $p(X = 2)$.

2) On choisit au hasard l'un des deux dés, le choix étant équiprobables, On lance le dé choisi trois fois de suite. On considère les événements suivants :

A : « le dé choisi est le dé bien équilibré »

B : « Obtenir exactement deux 6 »

a) Calculer la probabilité des événements suivants :

C : « Choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 ».

D : « Choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 »

b) En déduire que $p(B) = \frac{7}{48}$.

c) Ayant choisi l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, sachant qu'on a obtenu exactement deux 6, quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

EXERCICE5 (5,5pts) :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$. On désigne par ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm.

1) a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Montrer que le point $I(1; 2e^{-1})$ est un point d'inflexion de ζ_f .

c) Ecrire l'équation de la tangente T à ζ_f au point I puis tracer T et ζ_f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = \int_0^n f(x)dx$. a) Interpréter graphiquement U_n .

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 2 - (2+n)e^{-n}$. Déduire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3)a) Montrer que la restriction g de la fonction f à l'intervalle $[0; +\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]0; 1]$. Tracer la courbe $\zeta_{g^{-1}}$ de g^{-1} dans le même repère.

b) Donner la valeur de $\int_0^1 f(x)dx$ puis montrer que $\int_{2e^{-1}}^1 g^{-1}(x)dx = \frac{2e-5}{e}$.

4) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_k = \int_{k-1}^k f(x)dx$. a) Vérifier que $U_n = \sum_{k=1}^n V_k$.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $V_k = (e-1)ke^{-k} + (e-2)e^{-k}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = (e-1)\sum_{k=1}^n ke^{-k} + \frac{e-2}{e-1}(1-e^{-n})$. Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n ke^{-k}$.



BON TRAVAIL