

Lycée Tahar Sfar Mahdia	<b>Devoir de contrôle n° 3</b> Mathématiques	Niveau : 4 <sup>ème</sup> Math
Date : 01 / 04 / 2017	Profs : SAIDI . A & MEDDEB . T	Durée : 2 heures

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

**Exercice n°1** : (9 pts)

Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On désigne par  $C_n$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a/ Montrer que, pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $f_n'(x) = \frac{e^x(x-n)}{x^{n+1}}$ .

b/ Etablir le tableau de variations de  $f_n$ .

2) a/ Vérifier que, pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $f_n(x) - n f_{n+1}(x) = f_n'(x)$ . (\*)

b/ Etudier les positions relatives des courbes  $C_1$  et  $C_2$ .

c/ Tracer  $C_1$  et  $C_2$ .

d/ Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  de la région du plan délimité par  $C_1$ ,  $C_2$  et les droites d'équations :  $x=1$  et  $x=2$ .

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $I_n = \int_1^2 f_n(x) dx$ .

a/ Montrer que, pour tout  $n > 1$ , on a :  $\frac{e}{n-1} \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \leq I_n \leq \frac{e^2}{n-1} \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$ .

b/ En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

4) a/ En utilisant la relation (\*) établie dans la deuxième question, montrer que :

pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n - n I_{n+1} = \frac{e^2}{2^n} - e$ .

b/ En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_{n+1}$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$ .

5) a/ Montrer que, pour tout  $n \geq 2$ , on a :  $f_n(2) < 2$ .

b/ En déduire que, pour tout  $n \geq 2$ , il existe un unique réel  $\alpha_n \in ]1 ; 2[$  tel que  $f_n(\alpha_n) = 2$ .

6) a/ Vérifier que, pour tout  $n \geq 2$  et pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $f_n(x) = x f_{n+1}(x)$ .

b/ En déduire que, pour tout  $n \geq 2$ ,  $f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1}$  puis que  $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ .

c/ Montrer que, pour tout  $n \geq 2$ , on a :  $\alpha_n = e^{\frac{\alpha_n - \ln 2}{n}}$ , en déduire que  $1 < \alpha_n < e^{\frac{2}{n}}$ , puis

calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ .

**Exercice n°2** : (5 pts)

- 1) a/ Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $7^{4n} - 1$  est divisible par 5.  
b/ Déterminer, pour tout entier  $n \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ , le reste modulo 5 de  $7^n$ .  
c/ En déduire que l'entier  $2 \times 7^{2017} + 49^{2016}$  est divisible par 5.
- 2) a/ Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$  et pour tout entier  $q$ , on a :

$$q^{n+1} - 1 = (q-1)(1+q+\dots+q^n).$$

b/ On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n 7^k$ . Montrer que  $S_n$  divise  $7^{n+1} - 1$ .

- 3) a/ Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le chiffre des unités de  $7^{4n+1}$ .  
b/ Soit  $x$  un entier, montrer l'équivalence :

$$6x \equiv 6 \pmod{10} \text{ si, et seulement si, } x \equiv 1 \pmod{10} \text{ ou } x \equiv 6 \pmod{10}.$$

c/ Montrer que  $S_{100}$  est un entier impair.

d/ En déduire le chiffre des unités de  $S_{100}$ .

**Exercice n°3** : (6 pts)

Soit  $ABCDEFGH$  un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé direct  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

- 1) a/ Déterminer les composantes du vecteur  $\vec{n} = \overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{BG}$ .  
b/ En déduire qu'une équation cartésienne du plan  $(BEG)$  est :  $x - y + z - 1 = 0$ .
- 2) a/ Vérifier que la droite  $(DF)$  est perpendiculaire au plan  $(BEG)$ .  
b/ Déterminer les coordonnées du point  $K$  intersection de  $(DF)$  et  $(BEG)$ .
- 3) Pour tout réel  $m$ . On considère l'ensemble  $S_m$  des points  $M(x; y; z)$  vérifiant l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(1-m)y - 2mz + 2m - \frac{1}{3} = 0.$$

a/ Montrer que, pour tout  $m \neq \frac{2}{3}$ ,  $S_m$  est la sphère de centre  $I_m(m; 1-m; m)$  et de rayon

$$R_m = \sqrt{3} \left| m - \frac{2}{3} \right|.$$

b/ Montrer que, lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ ,  $I_m$  varie sur la droite  $(DF)$  privée du point  $K$ .

c/ Montrer que  $S_m$  est tangente au plan  $(BEG)$  et préciser le point de tangence.

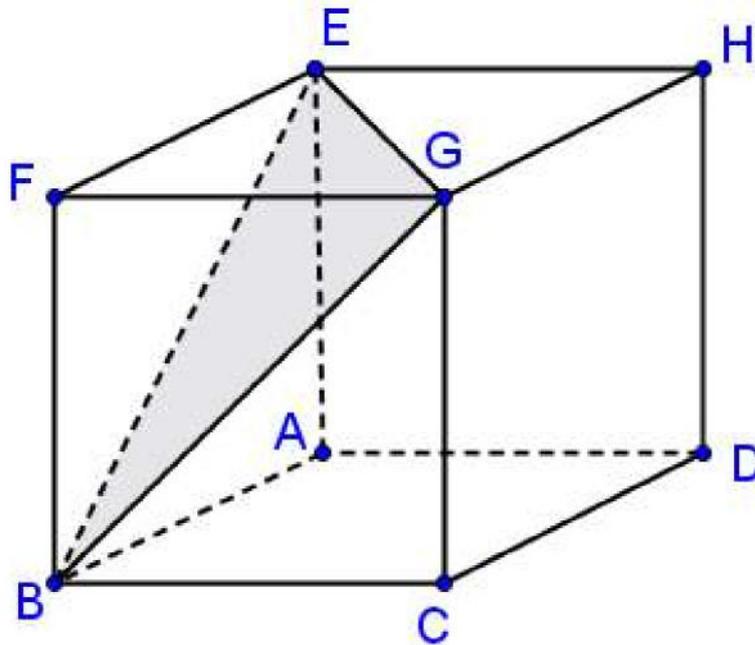
- 4) Soit  $P$  le plan passant par  $A$  et parallèle à  $(BEG)$ .

Déterminer la valeur de  $m$  pour que  $S_m$  coupe  $P$  suivant un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon 1.

5) Soit  $h$  l'homothétie de centre  $K$  et de rapport  $-\frac{1}{2}$ .

a/ Montrer que  $S_1$  est l'image de  $S_0$  par  $h$ .

b/ Soit  $P'$  l'image du plan  $P$  par  $h$ , montrer que  $P'$  et  $S_1$  sont sécants suivant un cercle  $\mathcal{C}'$  dont on précisera le rayon.



Bonne chance