Epreuve :	Lycée de Sbeïtla	Professeur :
Mathématiques	Devoir de contrôle N° 3	Elabidi Zahi
Durée : 2 heures	Classe : 4ème Maths 2	
	Année scolaire : 2014 // 2015	

Exercice 01

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on considère les points $A(0;0;1)$, $B(0;1;0), C(1;0;0)$ et $D(1;1;1)$

1) a) Montrer que les points A, B et C sont non alignés

b) Calculer l'aire du triangle ABC

c) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les points A, B et C

e) Vérifier que le point D n'appartient pas à P

f) Calculer le volume du tétraèdre ABCD

2) Soit S l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-x-y-z+\frac{1}{2}=0$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R

b) Montre que $S\cap P$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon

3) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2 .
Déterminer une équation cartésienne du plan Q image de P par h

Exercice 02

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

On considère la courbe $\mathscr{H}$: $x^2-y^2-1=0$

1) a) Montrer que $\mathscr{H}$ est une hyperbole dont on précisera les foyers, les sommets, les directrices et les asymptotes

b) Tracer $\mathscr{H}$

2) Soit $\mathscr{A}$ l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par $\mathscr{H}$ et la droite $\Delta : x=\sqrt{2}$ .Montrer que $\mathscr{A} = 2\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{t^2-1}\,dt$

3) Soit $F : x \mapsto \int_1^{g(x)}\sqrt{t^2-1}\,dt$ où $g(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et calculer $F'(x)$;pour tout $x\geq 0$

b) En déduire $F(x)$ en fonction de x ;pour tout $x\geq 0$

c) Calculer $g\left(\ln(1+\sqrt{2})\right)$.En déduire alors $\mathscr{A}$

Exercice 03

Partie A

1) Montrer que pout tout réel t strictement positif, $\ln t \leq t-1$

2) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-\ln x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

a) Donner une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au pont d'abscisse 1

b) Tracer T et $\mathscr{C}$

5) Soit $x > 1$ et (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 1 + \dfrac{\ln x}{x} + \ldots + \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^n$

Montrer que (v_n) est convergente et préciser sa limite

Partie B

Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \dfrac{t}{\ln t - t}\,dt$

1) Etudier le sens de variation de F

2) Déterminer le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0;1]$, $0 \leq \dfrac{x}{x - \ln x} \leq x$

b) En déduire que pour tout $x \in]0;1]$, $\dfrac{x^2 - 1}{2} \leq F(x) \leq 0$ et que $-\dfrac{1}{2} \leq \lim\limits_{x \to 0^+} F(x) \leq 0$

4) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 1$. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

5) a) Soit $x > 0$. Calculer les intégrales $\int_1^x \left(1 + \dfrac{\ln t}{t}\right) dt$ et $\int_1^x (1 + \ln t)\,dt$

b) Montrer que pour tout $t \geq 1$, $\dfrac{t}{t - \ln t} \leq 1 + \ln t$

c) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $F(x) \leq x \ln x$

d) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $x + \dfrac{(\ln x)^2}{2} - 1 \leq F(x)$

e) Donner un encadrement de l'intégrale $\int_1^e \dfrac{t}{t - \ln t}\,dt$