LYCEE IBN KHALDOUN RADES	DEVOIR DE CONTROLE N°3	Classe : 4 M1
Mr ABIDI Farid	MATHEMATIQUES	Durée : 2h
		Lundi 22 /4 / 2013

Exercice 1 *(5 points)*

Répondre par vrai ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}\,e^{-x} = 0$
2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = e^{3x}$. Soit f la solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ telle que f(0) = 1.
   a) $f'(0) = 1$.
   b) Pour tout x réel, $\int_0^x f(t)\,dt = \dfrac{3f(x) - e^{3x} - 2}{9}$
3. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $\left(5, \frac{1}{2}\right)$.
   a) La variance de X est $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
   b) La probabilité de l'évènement $(X \le 2)$ est $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 *(5 points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit les points A(-1, 1) et B(3, 2). On considère l'application f du plan dans lui-même, qui à tout point M(x, y), associe le point M'(x', y') tel que $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = x - y + 3 \end{cases}$.

1. Soit M_0 le point d'affixe 2 – 4i.

Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_0'}$ sont orthogonaux.

2. On considère un point M dont les coordonnées x et y sont des entiers.

Démontrer que : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, 5x + 3y = -2.

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation 5x + 3y = -2.
4. En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle [-6 ; 6] tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont orthogonaux.

Exercice 3 (5 points)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$, on considère le cube OIRJKLMN voir ci-dessous .

On note A le milieu du segment [IL] et B l'image du point N par l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{2}{3}$.

1. a) Déterminer les coordonnées de A et montrer que $B\left(0,\frac{2}{3},1\right)$.

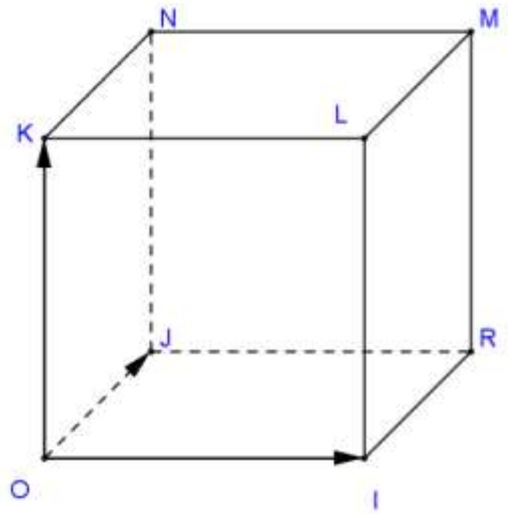
2. a) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés .

b) Montrer que l'aire du triangle OAB est $\frac{\sqrt{14}}{6}$

3. a) Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par B et perpendiculaire à la droite (OA).

b) Vérifier que K n'appartient pas au plan (P) et que calculer la distance du point K au plan (P).

c) Donner le volume du tétraèdre OABK.



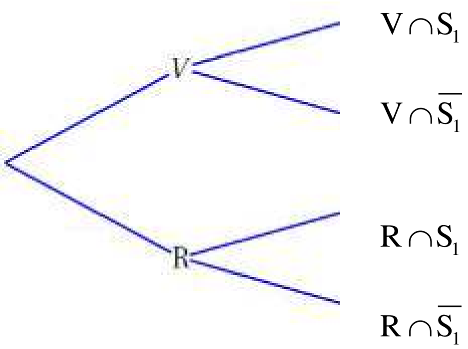
Exercice 4 (5 *points*)

Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.
On prend un dé au hasard dans l'urne et on le lance. On note :

– V l'évènement : « le dé tiré est vert »
– R l'évènement : « le dé tiré est rouge »
– S_1 l'évènement : « on obtient 6 au lancer du dé ».

1. On tire au hasard un dé et on effectue un lancer de celui-ci.

a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



b. Calculer la probabilité $p(S_1)$.

2. On tire au hasard un dé de l'urne. On lance ensuite ce dé n fois de suite. On note S_n l'évènement : « on obtient 6 à chacun des n lancers ».

a. Démontrer que : $p(S_n) = \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancers.

Démontrer que : $p_n = \dfrac{1}{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$

c. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $p_n \geq 0,999$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 1

1. Vrai

En effet : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}\,e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}} = 0$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = e^{3x}$. Soit f la solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ telle que f(0) = 1.

a) Faux.

En effet : $f'(0) - 3f(0) = 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1 + 3f(0) \Leftrightarrow f'(0) = 4$.

b) Vrai

En effet : Pour tout réel x et pour tout t compris entre 0 et x ,

$f'(t) - 3f(t) = e^{3t} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{3}\left(f'(t) - e^{3t}\right)$

Donc $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{3}\left(f'(t) - e^{3t}\right)dt = \left[\frac{1}{3}\left(f(t) - \frac{1}{3}e^{3t}\right)\right]_0^x = \left[\frac{3f(t) - e^{3t}}{9}\right]_0^x = \frac{3f(x) - e^{3x} - 2}{9}$

3. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $\left(5, \frac{1}{2}\right)$.

a) Faux

En effet : La variance de X est V= $5.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$.

b) Vrai

En effet : $p(X \leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$

$$= C_5^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 16 \times \frac{1}{32}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$). Soit les points A(-1, 1) et B(3, 2). On considère l'application f du plan dans lui-même, qui à tout point M(x, y), associe le point M'(x', y') tel que $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = x - y + 3 \end{cases}$.

1. Si M_0 le point d'affixe 2 – 4i alors $M_0'(-3,9)$.

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM'_0}\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM'_0}=-8+8=0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AM'_0}$.

2. On a : $\overrightarrow{AM'}\begin{pmatrix}x+y\\x-y+2\end{pmatrix}$ donc

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AM'}\Leftrightarrow 4(x+y)+(x-y+2)=0\Leftrightarrow 4x+4y+x-y+2=0\Leftrightarrow 4x+3y=-2$.

3. (2, -4) est une solution de l'équation 5x + 3y = -2.

Ainsi , 5x + 3y = -2 $\Leftrightarrow$ 5(x – 2) + 3(y + 4) = 0 $\Leftrightarrow$ –

$5\wedge 3=1$ et 3 divise $x-2$ donc $x-2=3k$, $k\in\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$.

Il en résulte : $5\times 3k=-3(y+4)\Leftrightarrow y+4=-5k\Leftrightarrow y=-5k-4$

La réciproque :

Si $(x,y)=(3k+2,-5k-4)$, où $k\in\mathbb{Z}$ alors 5x + 3y = 5(3k + 2) +3 (-5k - 4) = -2.

Ainsi , $\mathbb{Z}\ \mathbb{Z}$ + – –) $\in\mathbb{Z}\}$.

4. $-6\le x\le 6\Leftrightarrow -6\le 3k+2\le 6\Leftrightarrow -8\le 3k\le 4\Leftrightarrow k\in\{-2,-1,0,1\}$

$-6\le y\le 6\Leftrightarrow -6\le -5k-4\le 6\Leftrightarrow -2\le -5k\le 10\Leftrightarrow -10\le 5k\le 2\Leftrightarrow k\in\{-2,-1,0\}$

On en déduit que les points $M_k(3k+2,-5k-4)$, où $k\in\mathbb{Z}$ dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle [-6 ; 6] tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM'_k}$ sont orthogonaux sont :

$M\,M_{-2}(-4,6)$, $M_{-1}(-1,1)$ et $M_0(2,-4)$.

Exercice 3

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O,$, on considère le cube OIRJKLMN voir ci-dessous .

On note A le milieu du segment [IL] et B l'image du point N par l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{2}{3}$.

1. a) On a : I(1,0,0) et L(1,0,1) donc $A\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$.

On a : K(0,0,1) et donc (0)

$B=h_{\left(K,\frac{2}{3}\right)}(N)\Leftrightarrow$ $\frac{}{3}$ $\begin{cases}x_B=0\\ {}_B=\frac{2}{3}\\ z_B-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=0\\ y_B=\frac{2}{3}\\ z_B=1\end{cases}$ donc $B\left(0,\frac{2}{3},1\right)$.

2. a) On a $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

D'où $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points O, A et B ne sont pas alignés.

b) L'aire du triangle OAB est $\mathscr{A}(OAB) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}+1+\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{6}$.

3. a) $\overrightarrow{OA}$ est un vecteur normal au plan P donc P : $x+\frac{1}{2}z+d=0$, où $d\in\mathbb{R}$.

Or $B\left(0,\frac{2}{3},1\right)\in P$, il en résulte : $\frac{1}{2}+d=0 \Leftrightarrow d=-\frac{1}{2}$.

Ainsi, P : $x+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0$, ou encore $P: 2x+z-1=0$.

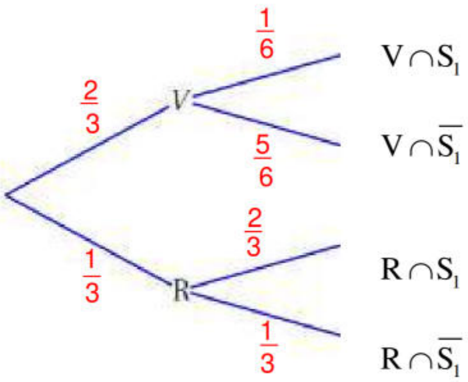
b) $2x_K+z_K-1=0+1-2=-1\neq 0$ donc $K\notin P$.

La distance de K au plan P est $d(K, P) = \frac{|-1|}{\sqrt{4+0+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

c) Le volume du tétraèdre OABK est $\mathscr{V}(OABK) = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{OK}\right| = \frac{1}{6}.\frac{2}{3} = \frac{1}{9}$.

Exercice 4

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



b. $p(S_1) = p(S_1\cap V)+p(S_1\cap R) = p(V).p(S_1|V)+p(R).p(S_1|R) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

2. On tire au hasard un dé de l'urne. On lance ensuite ce dé n fois de suite. On note S_n l'évènement : « on obtient 6 à chacun des n lancers ».

a. $p(S_n) = p(S_n \cap V) + p(S_n \cap R) = p(V).p(S_n|V) + p(R).p(S_n|R) = \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancers.

$$p_n = = \frac{p(R\cap S_n)}{p(S_n)} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{\frac{2}{3}.3\left(\frac{1}{6}\right)^n.\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} = \frac{1}{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}.$$

c. $p_n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow \frac{1}{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} \geq 0{,}999 \Leftrightarrow 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1 \leq \frac{1000}{999} \Leftrightarrow 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{999}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{1998} \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{4}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{1998}\right) \Leftrightarrow n\ln 4 \geq \ln(1998) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(1998)}{\ln 4}.$$

Or $\frac{\ln(1998)}{\ln 4} \simeq 5{,}48$, alors $n \geq 6$. D'où $n_0 = 6$