Lycée ch -khaznadar Teboursouk Prof : Rakrouki .M	Devoir de controle n°3	Classe : 4ème Math Durée : 180 minutes Date : 02/5/2012

Une grande importance sera attachée à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation

EXERCICE1 (3pts) :

Cocher la réponse exacte :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) La parabole de foyer $F(0;2)$ et de directrice $D: y=-2$ a pour équation :

$a)\ x^2=8y$ $\qquad$ $b)\ y^2=8x$ $\qquad$ $c)\ x^2=4y$

2) Soit (H) l'hyperbole d'équation $x^2-y^2=-1$, alors (H) d'axe focal :

$a)\ \Delta: y=-x$ $\qquad$ $b)\ (O\vec{j})$ $\qquad$ $c)\ (O\vec{i})$

3) La courbe d'équation $x^2+4y^2=1$ est une ellipse de centre O et de foyers :

$a)\ F(\frac{\sqrt{3}}{2};0)\ et\ F'(-\frac{\sqrt{3}}{2};0)$ $\qquad$ $b)\ F(0;\frac{\sqrt{3}}{2})\ et\ F'(0;-\frac{\sqrt{3}}{2})$ $\qquad$ $c)\ F(0;\sqrt{3})\ et\ F'(0;-\sqrt{3})$

4) La courbe d'équation $\left|\frac{x^2}{4}-1\right|=y^2$ est :

a) La réunion de deux hyperboles $\qquad$ b) Une hyperbole $\qquad$ c) La réunion d'une hyperbole et d'une ellipse

EXERCICE2 (3,5pts) :

On considère l'équation différentielle $(E): y'-y=2xe^x$.

1) Résoudre l'équation différentielle $(E'): y'-y=0$.

2)a) Soit $f(x)=(ax^2+1)e^x$. Déterminer le réel a pour que f soit solution de (E).

b) Soit g une fonction dérivable sur IR. Montrer que g est solution de (E) $\Leftrightarrow$ g – f est solution de (E')

c) Résoudre alors l'équation (E).

3) Soit h une solution de (E) vérifiant $h(x)\neq 0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$ on pose $\varphi(x)=\frac{1}{h(x)}$.

a) Montrer que φ est une solution de l'équation différentielle $(E''): y'+y+2xe^x y^2=0$.

b) Déterminer alors la solution de l'équation (E ″) qui vaut 1 en 0.

EXERCICE3 (4pts) :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit (P) l'ensemble des points M(x ;y) tels que : $x^2-2x-4y+1=0$.

Montrer que (P) est une parabole dont on précisera le foyer F et la directrice (D).

2) Soit $A(x_0\,;1)$ un point de (P) avec x_0 positive.

a) Calculer x_0 puis écrire une équation de la tangente (T) à (P) en A.

b) Tracer (T) et (P) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c) Soit A' le projeté orthogonal de A sur (D). La droite (T) coupe l'axe focal de (P) en un point B.

Déterminer les coordonnées des points A' et B puis montrer que les droites (AF) et (BA ') sont parallèles.

3) Soit (H) l'ensemble des points M(x ;y) tels que : $x^2 - 3y^2 = 6$.

a) Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera ses foyers et ses sommets.

b) Montrer que (T) est la tangente à (H) en A.

c) Déterminer les asymptotes de (H) puis la tracer dans le même repère.

<u>EXERCICE4 (4pts) :</u>

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1)On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? (expliquer).

b) Quelle est son espérance et son écart type ?

c) Calculer p(X = 2).

2) On choisit au hasard l'un des deux dés, le choix étant équiprobables, On lance le dé choisi trois fois de suite. On considère les évènements suivants :

A : « le dé choisi est le dé bien équilibré »   B : « Obtenir exactement deux 6 »

a)Calculer la probabilité des évènements suivants :

C : « Choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 ».

D : « Choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 »

b) En déduire que $p(B) = \frac{7}{48}$.

c) Ayant choisi l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, sachant qu'on a obtenu exactement deux 6, quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

<u>EXERCICE5 (5,5pts) :</u>

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$. On désigne par ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1)a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Montrer que le point $I\left(1;2e^{-1}\right)$ est un point d'inflexion de ζ_f.

c) Ecrire l'équation de la tangente T à ζ_f au point I puis tracer T et ζ_f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = \int_0^n f(x)dx$. a) Interpréter graphiquement U_n.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = 2-(2+n)e^{-n}$. Déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3)a) Montrer que la restriction g de la fonction f à l'intervalle $[0;+\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]0;1]$. Tracer la courbe $\zeta_{g^{-1}}$ de g^{-1} dans le même repère.

b) Donner la valeur de $\int_0^1 f(x)dx$ puis montrer que $\int_{2e^{-1}}^1 g^{-1}(x)dx = \dfrac{2e-5}{e}$.

4) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_k = \int_{k-1}^k f(x)dx$. a) Vérifier que $U_n = \sum\limits_{k=1}^n V_k$.

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $V_k = (e-1)ke^{-k} + (e-2)e^{-k}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = (e-1)\sum\limits_{k=1}^n ke^{-k} + \dfrac{e-2}{e-1}(1-e^{-n})$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^n ke^{-k}$.

BON TRAVAIL