| Lycée Pilote kairouan<br>Année Scolaire 2011-2010 | | Prof :Troudi kamel<br>Devoir de Contrôle n°3 | |
|---|---|---|---|
| 02-05-2011 | Classe : $4^{ème}M_1$ | Mathématiques | Durée : 4 heures |

**NB : Il sera tenu compte de la rédaction et la présentation des copies**

## Exercice n°1 (4 points)

Le tableau ci-dessous indique l'évolution de la population (en milliers) dans le gouvernorat de Kairouan de l'année 2001 à l'année 2009.

| Année | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année (x) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Population (y) | 151,1 | 164,9 | 178,1 | 183,7 | 185 ,2 | 186,3 | 189,7 | 191,3 | 193,9 |

1) a) Déterminer le coefficient de corrélation $\rho_{XY}$ . Interpréter.

b) Déterminer l'équation la droite de régression de y en x.

c) Utiliser cet ajustement pour estimer la population de Kairouan dans l'année 2015.

2) On pose z = lnx.

a)Déterminer le coefficient de corrélation $\rho_{ZY}$ • Interpréter.

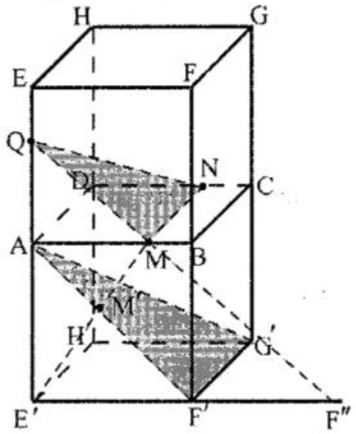
b) Déterminer l'équation la droite de régression de y en z.

c) En déduire un deuxième ajustement de y en x.

d) Donner alors une autre prévision de la population de Kairouan dans l'année 2015 ! Interpréter.

## Exercice n°2 ( 4points)

ABCDEFGH et E′F′G′H′ABCD sont deux cubes isométriques. On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$




1) a) Déterminer les coordonnées des points F' et G'.

b) Déterminer $\overrightarrow{AF'}\wedge\overrightarrow{AG'}$ En déduire une équation du plan (AF′G′).

2) soit S l'ensemble des points M( x. y ,z ) tel que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ .

a)Montrer que S est une sphère don' on précisera le centre et le rayon .

b) Déterminer $\mathscr{C}$ = S ∩ (AF′G′).

c) Montrer que le volume du cône de révolution de base $\mathscr{C}$ et de Sommet C est égal à : $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{12}$

3) Soit a un réel de $]0,\frac{1}{2}[$. On désigne par M et N les points Définis par : $\overrightarrow{AM}=2a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN}=a\overrightarrow{CD}$ et par Q le point de coordonnées (0,0, b) où b est un réel non nul.

a) Montrer que $\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{MQ} = b\overrightarrow{AB} + (3a-1)b\,\overrightarrow{AD} + 2a\overrightarrow{AE}$.

b) En déduire les valeurs de a et b pour les quels le plan (MNQ) est parallèle au plan (AF′G′).

4) Dans la suite de l'exercice on prend $a=\frac{1}{3}$ et $b=\frac{2}{3}$.

Soit h l'homothétie de centre E' qui transforme A en Q. La droite (QM) coupe (E'F') en F".

a) Montrer que h(F') = F"

b) La droite (E'M) coupe le plan (AF'G') en M'. Montrer que M', A et F' sont alignés.

## Exercice n°3 (4 points)

**Les deux parties sont indépendantes**

**I ) Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.**

**$P_1$ :** « Pour tout entier naturel $n$, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

**$P_2$ :** « Si un entier relatif $x$ est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \pmod 6$ alors $x \equiv 0 \pmod 3$ ».

**$P_3$** «si $x^2 + x \equiv 2 \pmod 3$ *et* $x^2 + x \equiv 2 \pmod 5$ *alors* $x^2 + x \equiv 2 \pmod{15}$ ».

**II )** 1) Déterminer $5999 \wedge 994$

2) a)Vérifier que ( -1032,-171) est une solution de l'équation ( E) : 142x - 857y = 3.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation ( E ).

3) Soit (x ,y) une solution de (E) et on pose : $\partial = x \wedge y$.

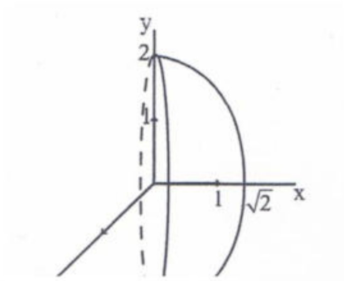
a) Déterminer les valeurs possibles de $\partial$.

b) Déterminer les solutions de ( E ) tels que $\partial = 1$.

4) Déterminer entier **n** naturel à six chiffres tel que lorsque l'on échange les trois premiers chiffres avec les trois derniers le résultat est obtenu est 6**n**+21. (On pourra poser **n** = y x )

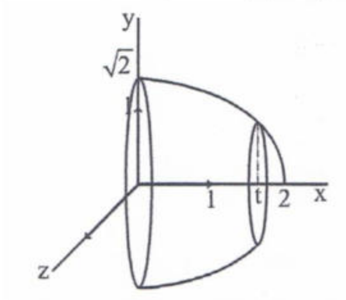
## Exercice n°4 (3 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé. $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$




1) Le solide S représenté ci-contre est obtenu par révolution autour de l'axe (O x) de la courbe y= $\sqrt{2(2-x^2)}$ Calculer le volume **V** de S.

2) Dans la figure ci-contre on a représenté la courbe de la fonction f définie sur [0,2] par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{2}}$ .




3) Soit t un réel de ]0, 2]. On pose $\mathscr{C}$'={M(x, y) tels que y=f(x), x∈ [0, t]}.
On désigne par S' le solide obtenu par révolution de $\mathscr{C}$' autour de (Ox).
a) Exprimer le volume V(t) de S en fonction de t.
b) Montrer que pour tout t∈ ]0,2], V(t ) < **V**
c) Montrer qu'il existe un seul réel $t_0$ dans ]0,2] pour lequel $V(t_0)=\dfrac{1}{2}$ **V**
Donner une valeur approchée de $t_0$ à $10^{-1}$ près.

## Exercice n°5 (5 points)

**A** Le graphique ci-dessous représente la courbe $(\mathscr{C})$ de la fonction $g(x)=e^{1-x}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=x\,e^{1-x}$.

1) On désigne par $(\mathscr{C}')$ la courbe de f dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
a) Dresser le tableau de variation de f.
b) Déterminer la nature des branches infinies de $(\mathscr{C}')$.
c) Etudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
d) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ de f.

2) Soit x un réel de $[1,+\infty[$, M le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse x et N le point de C' d'abscisse x.
a) Calculer la distance MN en fonction de x.
b) Déterminer la valeur de x pour laquelle MN est maximale.

3) Soit t un réel de $]1,+\infty[$.
a) Calculer, en fonction de t, l'aire A(t) de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations x = 1 et x = t.
b) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$.

**B** Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\int_1^2 (x-1)^n e^{1-x}dx$

1) a) Calculer $u_1$
b) Montrer que u est décroissante et qu'elle est convergente.

2) a) En intégrant par parties montrer : $u_{n+1}=-\dfrac{1}{e}+(n+1)u_n$
b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $u_n\le\dfrac{1}{ne}$ Calculer alors $\lim u_n$
c) Calculer $I=\int_1^2 (x^3-3x^2+2)e^{1-x}dx$

3) Soit F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $F(x)=\int_1^{1+2\ln x}(t-1)^n e^{1-t}dt$
a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(x)=2^{1+n}\dfrac{(\ln x)^n}{x^3}$ .
b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ : $F(x)=2^{1+n}\int_1^x\dfrac{(\ln t)^n}{t^3}dt$ .
c) Calculer alors $\int_1^{\sqrt{e}}\dfrac{(\ln t)^4}{t^3}dt$ .

<u>**Annexe à rendre**</u>

Nom & Prénom ;……………………………………………………………………………….

$(\mathscr{C})$