

<i>L. Regueb</i>	Mathématiques	<i>Classe : 4^{ème}M</i>
<i>Prof : Salhi Noureddine</i>	<i>Devoir de Contrôle N°3</i>	<i>Le : 28/04/2011</i> <i>Durée : 2h</i>

Exercice 1 (6pts)

1) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

- Donner une solution particulière de l'équation (E).
- Résoudre l'équation (E).

2) Soit N un nombre entier naturel tel qu'il existe un couple $(a; b)$ de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

- Montrer que le couple $(a; -b)$ est solution de (E).
 - Quel est le reste, dans la division euclidienne de N par 40 ?
- 3) a) Résoudre l'équation (E') : $8x + 5y = 100$, où $(x; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Un groupe composé de garçons et de filles a dépensé 100 dinars dans une salle de jeux.

Les garçons ont dépensé 8 dinars chacun et les filles 5 dinars chacune .

Combien pouvait-il y avoir de garçons et de filles dans le groupe ?

Exercice 2 (6pts)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et α est un paramètre de l'intervalle $]0, \pi[$.

On note (S_α) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que :

$$OM^2 - 2 \cos(\alpha) [\overrightarrow{OM} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})] + 3 - 4 \sin^2(\alpha) = 0$$

- Donner une équation cartésienne de (S_α) .
 - Montrer que (S_α) est une sphère, on note I_α son centre et R_α son rayon.

Prouver que I_α appartient à une droite fixe Δ .

2) a) Déterminer les sphères (S_α) passant par l'origine du repère.

- Montrer que O est le milieu de $[I_{\pi-\alpha} I_\alpha]$.
- En déduire que (S_α) et $(S_{\pi-\alpha})$ sont symétriques par rapport à O.

3) Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$

- Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de I_α sur P.
- Préciser l'intersection de P et (S_α) .

Exercice 3 (8pts)

Soit la fonction f définie sur $]-\infty; 0]$ par : $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$

On désigne par φ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm)

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 puis interpréter graphiquement ce résultat.

b) Etudier les variations de f sur $]-\infty; 0]$

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ sur $[0; 1[$.

b) Tracer φ_f et $\varphi_{f^{-1}}$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

3) a) Montrer que pour $x \in [0; 1[$, $f^{-1}(x) = \ln(1 - x^2)$.

b) Soit $F(x) = (x - 1) \ln(1 - x) + (x + 1) \ln(x + 1) - 2x$ pour $x \in [0; 1[$

Montrer que F est une primitive de f^{-1} sur $[0; 1[$

c) Soit A l'aire en cm^2 de la partie limitée par la courbe $\varphi_{f^{-1}}$ et les droites d'équations respectives $y = -\ln(2)$, $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Montrer que $A = (8 \ln(1 + \sqrt{2}) - 4\sqrt{2}) \text{cm}^2$

d) Déduire alors la valeur de l'intégrale $\int_{-\ln(2)}^0 \sqrt{1 - e^x} dx$