

Lycée Secondaire M. Bourguiba	DEVOIR DE SYNTHESE N° 2	Prof : Haouati Chokri	
Date: 6/3/2019	MATHEMATIQUES	4M 2	Durée : 4h

Exercice N°1(4points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1) Soit (P_0) la parabole d'équation $y^2=4x-4$
 - a) Déterminer le foyer et la directrice de P_0 puis tracer (P_0)
 - b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la parabole (P_0) et la droite d'équation $x=3$
- 2) Soit $F(a,b)$ un point du plan tels que $a>0$ et soit (P) la parabole de foyer F et de directrice la droite des ordonnées .
 - a) Prouver qu'une équation de (P) est : $(y-b)^2=2ax-a^2$
 - b) Montrer que (P) passe par $A(1,0)$ si et seulement si F appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1 privé du point O
- 3) Soient $F_1(a_1,b_1)$ et $F_2(a_2,b_2)$ deux points du cercle (C) privé du point O et P_1 et P_2 les paraboles correspondantes
 - a) Déterminer les équations des tangentes T_1 et T_2 en A aux paraboles P_1 et P_2
 - b) Montrer que si F_1 et F_2 sont diamétralement opposés sur (C) alors les deux tangentes T_1 et T_2 sont perpendiculaires

Exercice N°2(4points)

- 1) On considère l'équation $(E) : 27x+53y=1$ où x et y sont des entiers relatifs
 - a) Donner une solution particulière (x_0, y_0) de (E)
 - b) Résoudre alors dans Z^2 l'équation (E)
 - c) En déduire l'inverse de 27 modulo 53
- 2) Soient a et b deux entiers relatifs
 - a) Montrer que si $ab \equiv 0 \pmod{53}$ alors $a \equiv 0 \pmod{53}$ ou $b \equiv 0 \pmod{53}$
 - b) En déduire que si $a^2 \equiv 1 \pmod{53}$ alors $a \equiv 1 \pmod{53}$ ou $a \equiv -1 \pmod{53}$
- 3) On désigne par F l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 52
 - a) Prouver que pour tout entier $p \in F$ il existe un unique entier $q \in F$ tel que $pq \equiv 1 \pmod{53}$
 - b) Déterminer tous les entiers $p \in F$ tels que $p^2 \equiv 1 \pmod{53}$
 - c) Prouver que $52! \equiv -1 \pmod{53}$

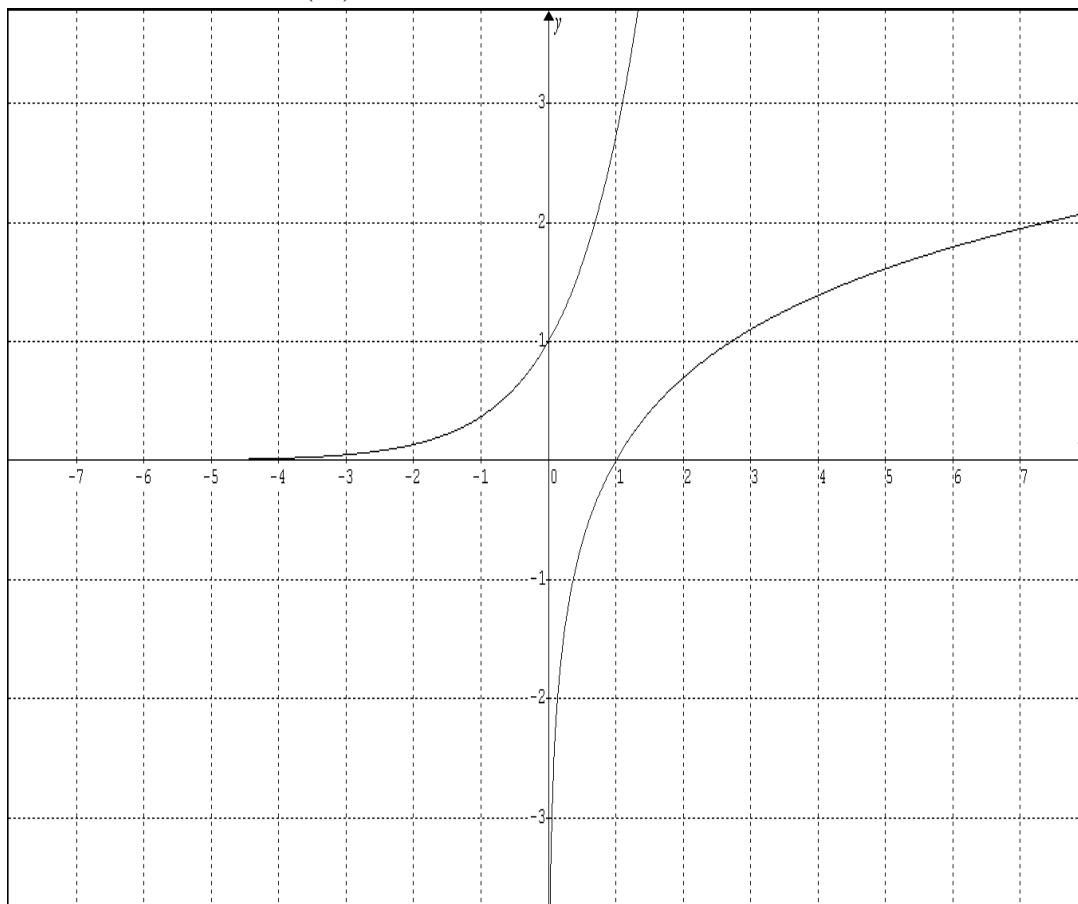
Exercice N°3(7points)

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)= e^{\sqrt{x}}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0
- 2) Dresser le tableau de variation de f
- 3) Dans l'annexe 1 on a représenté les courbes Γ_1 et Γ_2 d'équation respectives $y=e^x$ et $y= \ln(x)$
 - a) Déterminer les points d'intersections de C_f et Γ_1

- b) Montrer que C_f est au dessus de Γ_1
- c) Construire la demi-tangente a C_f au point d'abscisse 1
- d) Construire C_f
- 4) On se propose de déterminer l'aire A de la partie du plan limitée par C_f et Γ_1
- a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J à préciser
- b) Tracer $C_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque de f
- c) Montrer que $f^{-1}(x)=\ln^3(x)$
- d) Calculer $\int_1^e \ln^3 x dx$
- e) Calculer alors A
- 5) Soit la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt$ si $x > 0$ et $F(0) = \ln 2$
- a) Montrer que $\forall x > 0$, on a : $e^{\sqrt[3]{x}} \ln 2 \leq F(x) \leq e^{\sqrt[3]{2x}} \ln 2$
- b) Montrer que F est continue à droite en 0
- c) Etudier la dérivabilité de F à droite en 0
- d) Montrer que $\forall x > 0$, $F'(x) = \frac{1}{x} (e^{\sqrt[3]{2x}} - e^{\sqrt[3]{x}})$
- e) Montrer que l'équation $F(x) = \frac{n+1}{n} \ln 2$ admet une solution unique $a_n \in]0, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
- 6) Soit la suite (S_n) définie par $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{a_k}$
- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{\ln(n+1)}{n\sqrt[3]{2}} \leq S_n \leq \frac{\ln(n+1)}{n}$
- b) En déduire la limite de (S_n)



Exercice N°4(5points)

1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

a) Vérifier que $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

b) En déduire que $\int_0^{\ln 3} f(x)dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{(1+e^x)^{n+1}}$ et $I_n = \int_0^{\ln 3} f_n(x)dx$

a) Vérifier que $x \in \mathbb{R}, \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = f(x) - (f(x))^2$

b) Montrer que $\int_0^{\ln 3} f_1(x)dx = \frac{1}{4}$

c) En déduire le volume du solide engendré par rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par C_f l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=\ln 3$

3) En remarquant que $f_2(x) = e^x \cdot \frac{e^x}{(1+e^x)^3}$, montrer à l'aide d'une intégration par partie que

$$\int_0^{\ln 3} f_2(x)dx = \frac{5}{32}$$

4) a) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2^{n+1} - 3^n}{(n+1) \cdot 2^{2n+2}} + \frac{n}{n+1} I_n$

b) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{3^n - 2^n}{n \cdot 4^n}$

c) En déduire la limite de I_n