| Lycée Secondaire M. Bourguiba | DEVOIR DE SYNTHESE N° 2 | Prof : Haouati Chokri | |
|---|---|---|---|
| Date: 6/3/2019 | MATHEMATIQUES | 4M 2 | Durée : 4h |

**Exercice N°1(4points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Soit $(P_0)$ la parabole d'équation $y^2=4x-4$
   a) Déterminer le foyer et la directrice de $P_0$ puis tracer $(P_0)$
   b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la parabole $(P_0)$ et la droite d'équation $x=3$
2) Soit $F(a,b)$ un point du plan tels que $a>0$ et soit (P) la parabole de foyer F et de directrice la droite des ordonnées .
   a) Prouver qu'une équation de (P) est : $(y-b)^2=2ax-a^2$
   b) Montrer que ( P) passe par $A(1,0)$ si est seulement si F appartient au cercle ( C) de centre A et de rayon 1 privé du point O
3) Soient $F_1(a_1,b_1)$ et $F_2(a_2,b_2)$ deux points du cercle ( C) privé du point O et $P_1$ et $P_2$ les parables correspondantes
   a) Déterminer les équations des tangentes$T_1$et $T_2$ en A aux paraboles $P_1$ et $P_2$
   b) Montrer que si $F_1$ et $F_2$ sont diamétralement opposés sur ( C) alors les deux tangentes $T_1$ et $T_2$ sont perpendiculaires

**Exercice N°2(4points)**

1) On considère l'équation (E) : $27x+53y=1$ ou x et y sont des entiers relatifs
   a) Donner une solution particulière $(x_0,y_0)$ de ( E)
   b) Résoudre alors dans $Z^2$ l'équation ( E)
   c) En déduire l'inverse de 27 modulo 53
2) Soient a et b deux entiers relatifs
   a) Montrer que si $ab\equiv 0(\mathrm{mod}\,53)$ alors $a\equiv 0(\mathrm{mod}\,53)$ ou $b\equiv 0(\mathrm{mod}\,53)$
   b) En déduire que si $a^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,53)$ alors $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,53)$ ou $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,53)$
3) On désigne par F l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 52
   a) Prouver que pour tout entier $p\in F$ il existe un unique entier $q\in F$ tel que $pq\equiv 1(\mathrm{mod}\,53)$
   b) Déterminer tous les entiers $p\in F$ tels que $p^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,53)$
   c) Prouver que $52!\equiv -1(\mathrm{mod}\,53)$

**Exercice N°3(7points)**

Soit f la fonction définie sur [0,1] par $f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}$

On désigne par $C_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0
2) Dresser le tableau de variation de f
3) Dans **l'annexe 1** on a représenté les courbes $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ d'équation respectives $y=e^x$ et $y=\ln(x)$
   a) Déterminer les points d'intersections de $C_f$ et $\Gamma_1$

b) Montrer que $C_f$ est au dessus de $\Gamma_1$

c) Construire la demi-tangente a $C_f$ au point d'abscisse 1

d) Construire $C_f$

4) On se propose de déterminer l'aire A de la partie du plan limitée par $C_f$ et $\Gamma_1$

a) Montrer que f réalise une bijection de [0,1] sur un intervalle J à préciser

b) Tracer $C_{f^{-1}}$ de la fonction réciproque de f

c) Montrer que $f^{-1}(x)=\ln^3(x)$

d) Calculer $\int_1^e \ln^3 x dx$

e) Calculer alors A

5) Soit la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x)=\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt$ si $x>0$ et $F(0)=\ln 2$

a) Montrer que $\forall x>0$ , on a : $e^{\sqrt[3]{x}}\text{Ln}2 \le F(x) \le e^{\sqrt[3]{2x}}\ln 2$

b) Montrer que F est continue à droite en 0

c) Etudier la dérivabilité de F à droite en 0

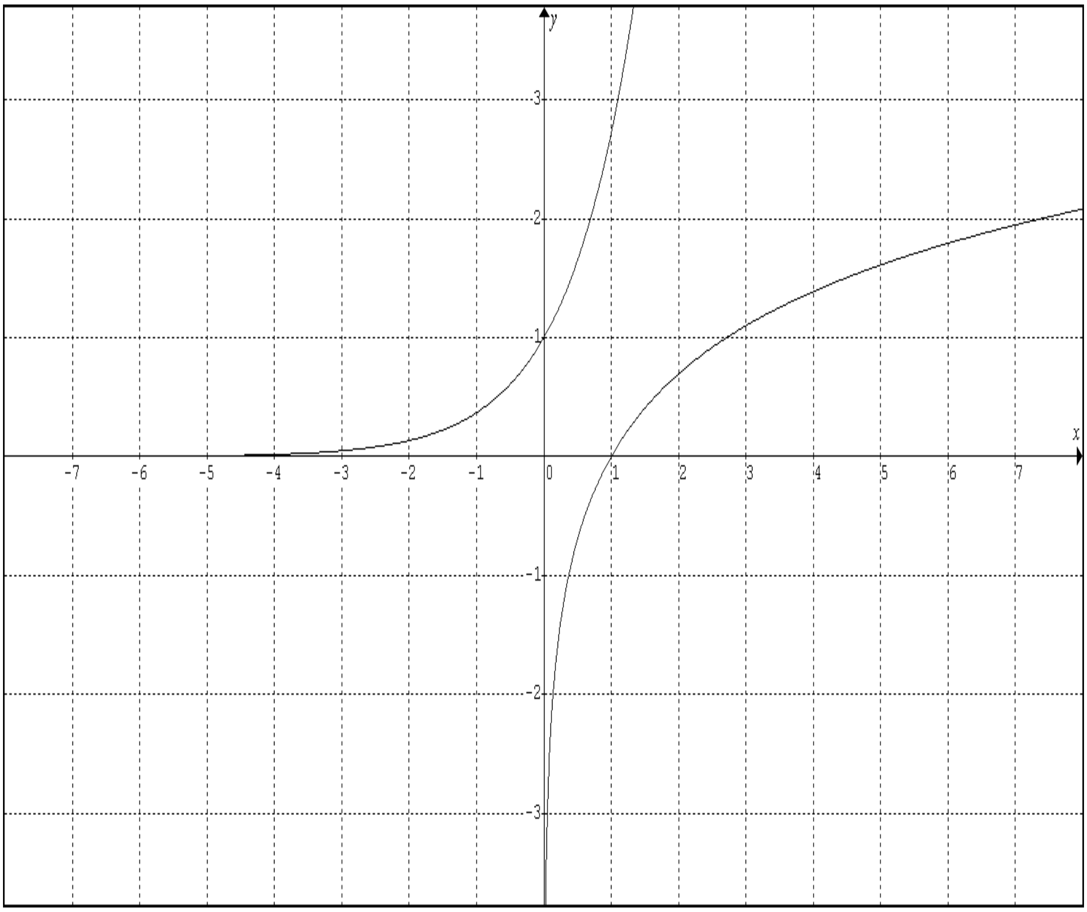
d) Montrer que $\forall x>0,\ F'(x)=\frac{1}{x}(e^{\sqrt[3]{2x}}-e^{\sqrt[3]{x}})$

e) Montrer que l'équation F(x)= $\frac{n+1}{n}\ln 2$ admet une solution unique $a_n \in ]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

6) Soit la suite $(S_n)$ définie par $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{a_k}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a: $\frac{\ln(n+1)}{n\sqrt[3]{2}} \le S_n \le \frac{\ln(n+1)}{n}$

b) En déduire la limite de $(S_n)$



**Exercice N°4(5points)**

1) Soit la fonction f definie sur IR par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$

   a) Vérifier que $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

   b) En deduire que $\int_{0}^{Ln3} f(x)dx = Ln(\dfrac{3}{2})$

2) Pour tout $n \in IN$ et $x \in IR$ on pose $f_n(x)=\dfrac{e^{nx}}{(1+e^{x})^{n+1}}$ et $I_n = \int_{0}^{Ln3} f_n(x)dx$

   a) Verifier que $x \in IR, \dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}} = f(x)-(f(x))^{2}$

   b)Montrer que $\int_{0}^{Ln3} f_1(x)dx = \dfrac{1}{4}$

   c) En deduire le volume du solide engendre par rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par $C_f$ l'axe des abscisses et les droites d'équation x=0 et x=Ln3

3) En remarquant que $f_2(x)= e^{x}.\dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^{3}}$, montrer a l'aide d'une integration par partie que

   $\int_{0}^{Ln3} f_2(x)dx = \dfrac{5}{32}$

4) a) Montrer a l'aide d'une integration par partie que $\forall n \in IN$ , $I_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}-3^{n}}{(n+1).2^{2n+2}} + \dfrac{n}{n+1} I_n$

   b)Montrer ,par recurrence , que pour tout n $n \in IN^*$ , $I_n = \dfrac{3^{n}-2^{n}}{n.4^{n}}$

   c) En déduire la limite de $I_n$