

Exercice n°1 : (3 points)

Choisir l'unique bonne réponse et sans justification.

- 1) L'ensemble des solutions de l'équation : $\ln x = -2$ est
- a) L'ensemble vide b) $\{\sqrt{e}\}$ c) $\{\frac{1}{e^2}\}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln x$ égal à :
- a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$
- 3) $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ égal à
- a) $-\frac{1}{2}$ b) $\ln 2$ c) $\frac{1}{2}$

Exercice n°2 : (6 points)

L'espace est munie d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points A(0,3,0), B(1,1,5) et C(4,1,2).

- 1) a) Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ et déduire que A, B et C ne sont pas alignés.
b) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
- 2) Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$
- a) Montrer que S est une sphère de centre I(1,1,2) et dont on précisera son rayon.
b) Montrer que la sphère S et le plan (ABC) sont sécants suivant le cercle (C) circonscrit au triangle ABC.
c) Déterminer le centre H du cercle (C) et son rayon.
- 3) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (IB).
b) Montrer que (IB) coupe la sphère S en deux points G et F dont précisera leurs coordonnées.
c) Déterminer une équation cartésienne des plans Q et Q' perpendiculaires à (IB) et tangentes à la sphère S.

Exercice 3 (5 points)

I) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} , par : $g(x) = 1 - 2x + e^{2x}$ dont le tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	$+\infty$		$g(0)$		$+\infty$

1) Calculer $g(0)$

2) En déduire le signe de g

II) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x + 2 + xe^{-2x}$.

On appelle \mathcal{C} sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2) a) Montrer pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{2x}}$

b) Dresser le tableau des variations de f .

3) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera.

4) a) Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à f au voisinage de $+\infty$.

b) Étudier la position relative de \mathcal{C} par rapport à D .

c) Montrer que \mathcal{C} admet une branche parabolique que l'on précisera au voisinage de $-\infty$

Exercice 4 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x + x(\ln x)^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4cm).

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = (1 + \ln x)^2$.

d) Dresser le tableau de variations de f .

2) a) Écrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1.

b) Étudier la position relative de (C) et T .

c) Construire T et (C) .

3) Soit la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ définie par $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

a) À l'aide d'une intégration par partie Calculer I_1 .

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$.

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x=1$, $x=e$ et $y=0$. Calculer A en cm^2 .