2017-2018	Devoir de synthèse n°2	4éme math	Durée : 4h

Exercice n°1 :

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1-Soit a et b deux entiers relatifs non nuls, on a $a \wedge b = (2a+b) \wedge (a+b)$.

2-la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2e^{1-x}$ *est une solution de l'équation différentielle* $y' + y = 0$.

3-a et b deux entiers naturels, si $ab \equiv 0 \ (mod\ 6)$ *alors* $a \equiv 0 \ (mod\ 6)$ *et* $b \equiv 0 \ (mod\ 6)$.

4-soit f et f_0 *deux fonctions définies sur IR, si f et* f_0 *sont deux solutions de* $y'' + y = x$ *alors* $f - f_0$ *est une solution de l'équation différentielle* $y'' + y = 0$.

Exercice n°2 :

I-*L'espace est orienté. On considère le repère spatial* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *et ABCE le tétraèdre tel que :* $A(1,2,0)$, $B(0,1,1)$, $C(0,-1,3)$ *et* $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1-calculer les coordonnés du point E puis calculer l'aire du tétraèdre ABCE.

2-soit P le plan d'équation $P : 2x - 2y - z + 5 = 0$. *Montrer que P est parallèle à (ABC).*

3-soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. *Calculer les coordonnées du point K puis vérifier que k appartient à P.*

4- a-soit h l'homothétie du centre E qui transforme le point C en K. Déterminer le rapport de h.

b/ le plan P coupe les arêtes [EB] et [EA] en J et I. *Calculer le volume du tétraèdre EIJK.*

5-déterminer l'image du plan (ABC) par la translation du vecteur $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AC}$.

II-*on pose maintenant pour tout M(x ; y ; z) l'ensemble* $S(\propto)$ *tel que :*

$$\overrightarrow{OM}^2 - 2\cos\propto [\overrightarrow{OM} . (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})] + 3 - 4\sin^2 \propto = 0.$$

1-a-Donner une équation cartésienne de $S(\propto)$.

b-montrer que $S(\propto)$ *est une sphère dont on note* $I_\propto$ *son centre et* $R_\propto$ *son rayon, prouver que* $I_\propto$ *appartient à une droite fixe* Δ.

2-a- Déterminer les sphères $S(\propto)$ *passent par l'origine du repère.*

b- Montrer que O est le milieu de $[I_{\pi-\alpha} I_\alpha]$.

c-En déduire que $S(\propto)$ *et* $S(\pi - \propto)$ *sont symétriques par rapport à O.*

3- a-Soit P le plan d'équation : $x + y + z = 0$, *déterminer les coordonnées du H le projeté orthogonal de* I_α *sur P.*

Partie A : *soit f la fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $f(x)=e^{\frac{1}{lnx}}$. *On pose* $F(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt$.

1-a-Montrer que pour tout $x>1$, *ona* $f(x+1)\leq F(x)\leq f(x)$. *En déduire* $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

b-Montrer que pour tout $u\in]0,+\infty[$, *on a :* $e^u\geq u+1$. *En déduire que pour tout* $x>1$, *on a* $F(x)-1\geq \int_x^{x+1}\frac{1}{lnt}dt$.

2-a-Montrer que pour tout $u\in]0,+\infty[$ *on a :*$\ln u\leq u-1$.

b-En déduire que pour tout $x>1$, *on a* $\int_x^{x+1}\frac{1}{lnt}dt \geq \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

3-a-Déduire de ce qui précède $\lim_{x\to1^+} F(x)$.

b-Dresser le tableau de variation de la fonction $F(x)$.

c-Tracer l'allure générale de la courbe F dans un repère orthonormé.

Partie B : *soit n un entier naturel ,* $n\geq 1$. F_n *et* I_n *deux fonctions définies sur* $]1,+\infty[$ *par :* $f_n(x)=\frac{(lnx)^n}{n!\,x^2}$ *et* $I_n(x)=\int_1^x f_n(t)dt$.

1-a-calculer $I_1(x)$.

2-a-soit k un entier supérieur ou égale à 1 , en utilisant une intégration par partie : montrer que :

$$I_{k+1}=I_k-\frac{1}{(k+1)!}.\frac{(lnx)^{k+1}}{x}.$$

b-En déduire que pour tout $n\geq 1$, *on a :* $I_n(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{lnx}{x}-\frac{(lnx)^2}{2!x}-\cdots-\frac{(lnx)^{n-1}}{(n-1)!x}-\frac{(lnx)^n}{n!x}$.

3-Soit $\alpha\geq 1$.

a-pour tout $x>1$, *calculer* $f'_n(x)$ *puis en déduire les variations de* f_n.

b-vérifier que l'extrémum de la fonction f_n *sur son domaine de définition est* $y_n=\frac{1}{n!}(\frac{n}{2e})^n$.

c-Montrer que $0\leq I_n(\alpha)\leq(\alpha-1)y_n$. *Déduire la limite de* $I_n(\alpha)$.

4-Pour tout $x\geq 1$, *et* $n\geq 1$ *On pose :* $W_n(x)=1+\frac{lnx}{1!}+\frac{(lnx)^2}{2!}+\cdots.+\frac{(lnx)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(lnx)^n}{n!}$.

a-Exprimer W_n *en fonction de* I_n *puis calculer la limite de* $W(\alpha)$ *lorsque n tend vers plus l'infini.*

b-déduire de ce qui précède la limite γ *de la suite numérique du terme générale :*

$U_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}$.