

❖❖❖
DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2
❖❖❖

Classe: 4^{ème} Math

Epreuve: Mathématiques

Durée: 4h

Date: 4/3/2014

Exercice 1 : (3 points) Répondre par vrai ou faux avec justification :

1°) On donne $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ alors f a pour primitive sur $] -\infty, 0[$, la fonction $F : x \longrightarrow \ln(e^x - 1)$

2°) La valeur moyenne de la fonction exponentielle sur $[0, 1]$ est e .

3°) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

4°) La fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_0^x \sqrt{e^t + e^{-t}} dt$ est impaire .

5°) (u_n) est une suite géométrique de raison 2 à termes strictement positifs . On pose $v_n = \ln(u_n)$ alors (v_n) est une suite arithmétique de raison $\ln 2$

6°) Une parabole a pour foyer $F(2, -1)$ et pour sommet $S(2, 0)$ alors sa directrice a pour équation : $y = -2$

Exercice 2 : (3 points)

On donne une droite fixe D et un point F non situé sur D .

La perpendiculaire à D en point variable H coupe la perpendiculaire menée de F à (FH) en un point N .

Soit M le milieu de $[NH]$.

1) Montrer que M varie sur une parabole (P) dont on précisera le foyer et la directrice.

2) On rapporte le plan à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On donne $F\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ et $D: x = \frac{1}{2}$

a) Montrer que (P) a pour équation : $y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$.

b) Déterminer l'équation réduite de (P) puis déduire son sommet . Tracer (P) .

3) a) Vérifier que le point $A(3, -4)$ appartient à (P) puis vérifier que la tangente T à (P) en A

a pour équation : $x + 2y + 5 = 0$

b) T rencontre la droite $\Delta : x = -1$ en K . Montrer que OAK est un triangle rectangle .

Exercice3 : (4 points)

Dans le plan orienté on considère un losange OABC de centre I tel que $(\widehat{BC, BA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

Soit f la similitude directe de centre O tel que $f(B)=C$

- 1) Montrer que le rapport f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ puis déterminer son angle .
- 2) a) Déterminer le point $I' = f(I)$.
b) Soit $A' = f(A)$. Montrer que A' appartient à la droite (OB)
c) Montrer que $f((AC))$ est la médiatrice de [OC] et en déduire que A' est le centre du cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle OAC.
- 3) Soit l'application $g = f \circ S_{(AC)}$
 - a) Déterminer la nature de g préciser son rapport.
 - b) Déterminer $g(B)$ et $g(O)$.
 - c) Déterminer et construire le centre G de g.
 - d) Construire l'axe de g.
- 4) Le plan est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $B(0,2)$ et $C(-1,1)$
Déterminer l'expression complexe associée à g .

Exercice4 : (5 points)

1) Soit G la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $G(x) = \int_e^x \frac{1}{\ln t} dt$

Montrer que G est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $G'(x)$

2) Soit F la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ si $x \in]1, +\infty[$ et $F(1) = \ln 2$

On désigne par C la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- a) Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a : $\frac{x^2 - x}{\ln(x^2)} \leq F(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}$.
- b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$
- 3) a) Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]1, +\infty[$ par $u(t) = \ln(\ln t)$
b) Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$ et pour tout $t \in [x, x^2]$ on a : $\frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}$.
c) En déduire que pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a : $x \ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2$.
d) Montrer alors que F est continue en 1
- 4) a) Vérifier que pour tout $x > 1$, $F(x) = G(x^2) - G(x)$
b) Montrer que F est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.
- 5) Dresser le tableau de variation de F et tracer une allure de sa courbe . (On précisera la nature de la branche infinie)

Exercice 5 : (5 points)

Dans la page annexe qu'on rendra avec la copie ,on a tracé dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe \mathcal{C} de la

fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$

La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à \mathcal{C}

\mathcal{C} admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$

1) Par une lecture graphique , déterminer $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right)$

2) Soit g la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{1+x}$. On désigne par Γ sa courbe représentative

a) Etudier les variations de g

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat

c) Vérifier que pour tout $x \in] -1, +\infty[$, $g(x) - f(x) = g'(x)$ puis étudier la position relative de \mathcal{C} et Γ

d) Tracer Γ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

e) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par \mathcal{C} et Γ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^n} dx$

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente

b) Montrer que pour tout $n > 1$, on a $\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_n - n I_{n+1} = \frac{e}{2^n} - 1$

b) Retrouver la valeur de A

ANNEXE

