L. Regueb	Mathématiques	Classe : 4ème M
Prof : Salhi Noureddine	Devoir de Synthèse №2	Le : 08/03/2013 D: 4h

Exercice1(3pts)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte .Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée .

1) La similitude indirecte dont la transformation complexe associée est $z' = 2i\bar{z} + 3$

est d'axe la droite d'équation :

a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = -x + 1$

2) La limite de $\frac{x^2}{e^x - 1}$ quand x tend vers 0 est égale à :

a) 1 b) $+\infty$ c) 0

3) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Si $\int_1^2 (f(t) - 1)dt = 0$, alors la valeur moyenne de f sur $[1,2]$ est égale à :

a) 0 b) 1 c)2

Exercice2(5pts)

1) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$, $f(x) = x^3 e^{1-x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Construire la courbe (C) .

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2} dx$.

a) Calculer u_1 .

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite .

3)a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right) u_n - \frac{1}{2}$.

b) En déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives , $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice3(6pts)

Soit ABC un triangle isocèle direct de sommet principal A.

On pose $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv 2\alpha\ [2\pi]$ où α est un réel de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

On désigne par O le milieu de [BC] et par D le symétrique de A par rapport à O .

Soient I et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC) .

1) Soit f la similitude directe qui transforme O en I et D en J .

a) Montrer que f a pour angle α et pour rapport $\cos(\alpha)$.

b) Prouver que le centre de f est le point A .

2) On désigne par E le symétrique du point O par rapport au point I .

Montrer que $f(B) = O$ et que $f(C) = E$.

3) Soit g la similitude indirecte telle que : $g(B) = O$ et $g(C) = E$.

Déterminer le rapport de g et montrer que $g(O) = I$.

4) a) Montrer que $g = S_{(OE)} \circ f$

b) Montrer que $g(D) = A$ et $g(A) = J$.

5) Soit Ω le centre de g .

a) Montrer que $(g \circ g)(D) = J$ et en déduire que Ω appartient à la droite (DJ) .

b) Montrer que Ω appartient à la droite (BI) .

c) Construire le point Ω .

Exercice4(6pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ .On considère les ensembles des points M(x,y) suivants :

$$(H): x^2 - 4y^2 - 2x + 5 = 0 \qquad ; \qquad (P): 4y^2 + 2x - 5 = 0 \ .$$

1)a) Montrer que (H) est une hyperbole dont on précisera les foyers, les sommets et les asymptotes .

b) Montrer que (P) est une parabole dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice .

2)a) Construire (H) et (P) dans le même repère .

b) Vérifier que la droite T d'équation : $x + 2\sqrt{5}y - 5 = 0$ est une tangente commune à (H) et (P) au point $A\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

3) Pour tout $x \geq 0$, on pose : $F(x) = \int_1^{e^x - e^{-x} + 1} \sqrt{4 + (t-1)^2}\, dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F'(x) = (e^x + e^{-x})^2$

b) Calculer F(0) et déduire l'expression de F(x) pour tout $x \in [0,+\infty[$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $e^x - e^{-x} + 1 = \frac{5}{2}$.

d) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (H) et les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = \frac{5}{2}$. Montrer que $\mathcal{A} = \frac{15}{8} + 2\ln(2)$ (u.a).