DEVOIR DE SYNTHESE N°2	Classe: 4éme Math
	Epreuve: Mathématiques
	Durée: 4h — Date: 4/3/2014

Exercice1 : *(3 points)* **Répondre par vrai ou faux avec justification:**

1°) On donne $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ alors f a pour primitive sur $]-\infty,0[$, la fonction $F : x \longrightarrow \ln(e^x - 1)$

2°) La valeur moyenne de la fonction exponentielle sur [0,1] est e .

3°) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(1+ \frac{1}{x}) = 1$

4°) La fonction F définie sur IR par $F(x)=\int_0^x \sqrt{e^t + e^{-t}}\, dt$ est impaire .

5°) (u_n) est une suite géométrique de raison 2 à termes strictements positifs . On pose $v_n = \ln(u_n)$ alors (v_n) est une suite arithmétique de raison ln2

6°) Une parabole a pour foyer F(2,-1) et pour sommet S(2,0) alors sa directrice a pour équation : y = -2

Exercice2 : *(3 points)*

On donne une droite fixe D et un point F non situé sur D.

La perpendiculaire à D en point variable H coupe la perpendiculaire menée de F à (FH) en un point N .

Soit M le milieu de [NH] .

1) Montrer que M varie sur une parabole (P) dont on précisera le foyer et la directrice.

2) On rapporte le plan à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On donne $F(\frac{3}{2},-2)$ et D: $x = \frac{1}{2}$

a) Montrer que (P) a pour équation : $y^2-2x+4y+6 = 0$.

b) Déterminer l'équation réduite de (P) puis déduire son sommet . Tracer (P).

3) a) Vérifier que le point A(3, -4) appartient à (P) puis vérifier que la tangente T à (P) en A a pour équation : x+2y+5=0

b) T rencontre la droite Δ : x = -1 en K . Montrer que OAK est un triangle rectangle .

Exercice3 : (4 points)

Dans le plan orienté on considère un losange OABC de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit f la similitude directe de centre O tel que f(B)=C

1) Montrer que le rapport f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ puis déterminer son angle .

2) a) Déterminer le point I'= f(I).

b) Soit A' = f(A). Montrer que A' appartient à la droite (OB)

c) Montrer que f((AC)) est la médiatrice de [OC] et en déduire que A' est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle OAC.

3) Soit l'application $g = foS_{(AC)}$

a) Déterminer la nature de g préciser son rapport.

b) Déterminer g(B) et g(O).

c) Déterminer et construire le centre G de g.

d) Construire l'axe de g.

4) Le plan est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que B(0,2) et C(-1,1)

Déterminer l'expression complexe associée à g .

Exercice4 : (5 points)

1)Soit G la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $G(x)=\int_e^x \frac{1}{\ln t}dt$

Montrer que G est dérivable sur$]1,+\infty[$ et calculer G'(x)

2)Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$ si $x\in]1,+\infty[$ et $F(1)=\ln 2$

On désigne par C la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a)Montrer que pour tout $x\in]1,+\infty[$ on a : $\frac{x^2-x}{\ln(x^2)} \le F(x) \le \frac{x^2-x}{\ln x}$.

b)En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

3) a) Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]1,+\infty[$ par u(t) = ln (lnt)

b) Montrer que pour tout $x\in]1,+\infty[$ et pour tout $t\in[x,x^2]$ on a : $\frac{x}{t\ln t}\le\frac{1}{\ln t}\le\frac{x^2}{t\ln t}$.

c) En déduire que pour tout $x\in]1,+\infty[$ on a : $x\ln 2 \le F(x) \le x^2\ln 2$.

d) Montrer alors que F est continue en 1

4) a)Vérifier que pour tout $x > 1$, $F(x)=G(x^2)-G(x)$

b) Montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $F'(x)=\frac{x-1}{\ln x}$.

5) Dresser le tableau de variation de F et tracer une allure de sa courbe . (On précisera la nature de la branche infinie)

Exercice 5 : (5 points)

Dans la page annexe qu'on rendra avec la copie ,on a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+x)^2}$

La droite d'équation x = - 1 est une asymptote à $\mathscr{C}$

$\mathscr{C}$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$

1)Par une lecture graphique , déterminer $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2)Soit g la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$. On désigne par Γ sa courbe représentative

a)Etudier les variations de g

b)Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat

c)Vérifier que pour tout $x\in\ ]-1,+\infty[$, $g(x)-f(x)=g'(x)$ puis étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Γ

d)Tracer Γ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

e)Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ et Γ et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1

3)Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{(1+x)^n}dx$

a)Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente

b)Montrer que pour tout n >1 , on a $\dfrac{1}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\le I_n\le\dfrac{e}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$

c)En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

4)a)Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $I_n-n\ I_{n+1}=\dfrac{e}{2^n}-1$

b)Retrouver la valeur de $\mathcal{A}$

ANNEXE