

Lycée Martyr Wallid Mechlaoui Mornag	DEVOIR DE SYNTHESE N°2	Le :04/03/2014
Prof :Oueslati.Mongi		4 ^{ème} Math Duré : 4 H

EXERCICE N°1 (3 points)

Répond par vrai ou faux en justifiant vos repense.

1) Soit l'application f de P dans P qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que

$$z' = 2i\bar{z} - 4 \text{ .Alors l'axe de } f \text{ à pour équation } x=y$$

2) Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} tel que pour tout $x > 0$;

$$f(-x) = 2f(x) ; \text{ il existe alors}$$

$$\text{un réel } c \text{ de } [-2 ; 0] \text{ tel que : } \int_0^2 f(t)dt = f(c)$$

3) Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} ; F sa primitive sur \mathbb{R} et

$$\text{on a } I = \int_0^x t f'(t)dt$$

Alors F est une solution de l'équation différentielle (E) : $x y' - y = I$

EXERCICE N°2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère

les points M ; N et P d'affixe respectives z ; $\frac{2+z-\bar{z}}{2}$ et $1+iz$

et Δ la droite d'équation $x=1$

1) Montrer que P est l'image de M par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ que

l'on précisera le centre

2) Montrer que N est le projeté orthogonale du point M sur Δ

3) Soit \mathcal{P} l'ensemble des points M d'affixe z tel que O ; N et P soient alignés

a) Montrer qu'une équation cartésienne de \mathcal{P} est $x-y(1-y)=0$.

b) Montrer que \mathcal{P} est une parabole dont on précisera le sommet ; le foyer et la directrice.

c) N étant un point donné sur Δ ; donner une procédé de construction du point M de \mathcal{P}

EXERCICE N°3 (4 points)

1) Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$

Résoudre (E)

2) Soit f et g deux fonctions deux fois dérivables sur $]0 ; +\infty[$ tel

que : $f(x) = xg(\frac{1}{x})$ Montrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ on a :

$$f''(x) = \frac{1}{x^3} g''(\frac{1}{x})$$

3) Soit l'équation différentielle (E') : $y'' + \frac{1}{x^4} y = 0$

- a) Montrer que g est une solution de (E') si et seulement si f est une solution de (E)
- b) On prend $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que g est une solution de (E')
- c) Dédurre la primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^4} g(x)$ sur $]0; +\infty[$
- d) Calculer alors $I = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

EXERCICE N°4 (5 points)

Soit f une fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$; soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) a) Etudier les variations de f
 b) Montrer que le point $I(0; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (C)
 c) Construire la courbe (C) .

2) a) Montrer que qu'il existe deux réels a et b tel que $f(x) = a + \frac{be^{2x}}{1+e^{2x}}$

b) Soit $\alpha > 0$; calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limité par la courbe (C) ; la droite d'équation $x = \alpha$; $x = 0$ et $y = 0$ puis calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$

3) On pose $I_n = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^{2nt} dt$; pour tout $n \in \mathbb{Z}$

a) Calculer I_0 et I_n pour $n \neq 0$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ et pour tout $t \in [-1; -\frac{1}{2}]$ on a

$$1 - e^{2t} + e^{4t} - \dots \dots \dots (-1)^{n-1} e^{2(n-1)t} = \frac{1}{1+e^{2t}} - \frac{(-1)^n e^{2nt}}{1+e^{2t}}$$

c) En déduire que

$$I_0 - I_1 + I_2 + \dots \dots \dots + (-1)^{n-1} I_{n-1} = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dt}{1+e^{2t}} + (-1)^{n+1} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{2nt}}{1+e^{2t}} dt$$

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ $0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^{2nt} f(t) dt \leq I_n$; en déduire

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^{2nt} f(t) dt = 0$

4) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_0 - I_1 + I_2 - \dots \dots \dots + (-1)^{n-1} I_{n-1}) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^2 + 1}{e + 1}\right)$

EXERCICE N°5 (4 points)

Dans le plan orienté ;soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que : $(\overline{AB};\overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

on désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ et $[JC]$

1) Soit f la similitude directe de centre J tel que $f(A)=K$

a) Déterminer l'angle et le rapport de f

b) Justifier que $f(K)=L$

c) soit H le milieu de $[AJ]$.Montrer que $f(I)=H$

2) On munit le plan du repère orthonormé direct $(A; \overline{AB}; \overline{AC})$. Soit g du plan dans

lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M'

d'affixe $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{z} + \frac{1+i}{2}$.

a) Montrer que g est une similitude indirecte de centre C

b) Donner les affixes de I, J

c) Déterminer $g(I)$ et $g(J)$

d) Soit Δ l'axe de g ; tracer Δ