Lycée Av de la république Mr :Zarati Moncef	Lycée Cité El-amal Mr :Marzouk Ali	Lycée Farhat Hachad Mr :Ben Hassine Hedi

Devoir de synthèse n°2

04/03/2014

Section :Mathématiques

Epreuve: Mathématiques - Durée : 4 heures - Coefficient : 4

Le sujet comporte 4pages numérotées de 1/4 à 4/4.La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice N°1 (3 points)

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. On donne les similitudes suivantes :

$f: P \to P$ et $g: P \to P$

$M(z) \mapsto M_1(z_1)$ tq $z_1 = 2(-\sqrt{3}+i)z+1$; $M(z) \mapsto M_2(z_2)$ tq $z_2 = 2i\bar{z}-3$

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) Le centre de g a pour affixe : 3 + 6i.

2) L'axe de g a pour équation : y = x + 1.

3) Si R est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ alors l'application foR est une homothétie de rapport – 4.

4) Si h est une homothétie de rapport $(-\frac{1}{4})$ alors l'application hof est une similitude directe d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

Exercice N°2 (4 points)

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E) : 6x - 7y =1.Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation(E).

2) On considère le système(S) : $\begin{cases} n \equiv 1 \pmod 6 \\ n \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$ où n est un entier.

a) Montrer que : n est une solution de (S) $\Leftrightarrow n \equiv 37 \pmod{42}$.

b) Vérifier que 1969 est solution de (S) et déterminer le reste modulo 42 de 1969^{2013}

3) a) Donner une solution particulière de (E') : 6x - 7y=5.

b) Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de (E').

4) Soit (x, y) une solution de (E') et $d = x \wedge y$.

a) Déterminer les valeurs possibles de d.

b) Préciser les solutions de (E') lorsque d=1

c) On suppose que d=5 : Déterminer les couples (x, y) solutions de (E').

5) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $\begin{cases} 6a-7b=5 \\ a\wedge b=5 \\ a\vee b=150 \end{cases}$

Exercice N°3 (4.5 points)

On donne les fonctions f_2 et f_3 définies sur $]0,+\infty[$ par : $f_2(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$ et $f_3(x)=\dfrac{1+3\ln x}{x^2}$.

Dans la figure donnée en annexe (à rendre) on a tracé la courbe (C_3) de f_3 dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Les axes du repère sont deux asymptotes de (C_3) et la tangente au point B d'abscisse $e^{\frac{1}{6}}$ est horizontale.

1) En se référant au graphique, donner le tableau de variation de f_3

2) a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$: $f'_2(x)=-\dfrac{4\ln x}{x^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f_2

c) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$: $f_3(x)-f_2(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

En déduire la position relative de (C_2) et (C_3).

d) Tracer (C_2) dans le même repère.

e) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_2), (C_3) et les droites x =1 et x = e.

3) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $f_n(x)=\dfrac{1+n\ln x}{x^2}$ et C_n sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que pour tout $x \succ 0$: $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

b) Interpréter alors graphiquement l'intégrale : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

c) On note A_n l'aire de la partie du plan limitée par C_n ; y =0 ; x = 1 et x = e.

Calculer A_2 en cm²

d) Déterminer la nature de la suite (A_n) et interpréter graphiquement sa raison.

Exercice N°4 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$

On note (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)=\dfrac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que C_f admet au voisinage de $-\infty$ une branche infinie de direction celle de $(O,\vec{j})$.

b) Tracer (C_f).

3) Soit la fonction g définie sur $]e,+\infty[$ par $g(x)=\int_2^{\ln x} f(t)\,dt$.

On note (C_g) la courbe de g dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]e,+\infty[$ et que $g'(x)=\dfrac{1}{x^2(1-\ln x)}$.

b) En déduire le sens de variation de g.

c) Ecrire une équation de la tangente Δ à (C_g) au point d'abscisse e^2 .

4) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ par : $U_n=\int_{-1}^{0}\dfrac{e^{-x}}{(1-x)^n}\,dx$.

a) Montrer que U est décroissante.

b) En déduire que U est convergente.

c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $U_n=\dfrac{1}{n-1}\left[1-\dfrac{e}{2^{n-1}}+U_{n-1}\right]$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$.

Exercice N°5 (3.5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.on donne l'ensemble ($\mathscr{E}$) des points M(x, y) tels que :

$$x^2+4y^2-2x-3=0$$

1) a) Montrer que ($\mathscr{E}$) est une ellipse dont on précisera le centre Ω et l'excentricité e.

b) Déterminer les sommets et les foyers de ($\mathscr{E}$).Tracer ($\mathscr{E}$).

2) Soit $\theta\in]0,2\pi[\setminus\{\pi\}$ et M_θ le point de coordonnées $(1+2\cos\theta;\sin\theta)$.

a) Vérifier que le point M_θ appartient à ($\mathscr{E}$).

b) Montrer qu'une équation de la tangente ($\mathscr{T}$) à ($\mathscr{E}$) en M_θ est : $x\cos\theta+2y\sin\theta=2+\cos\theta$

3) On désigne par N et P les points d'intersection de ($\mathscr{T}$) respectivement avec les droites x = -1 et x = 3.

a) Déterminer les coordonnées de N et P.

b) F étant un foyer de ($\mathscr{E}$).Montrer que le triangle NPF est rectangle en F.

Annexe du devoir de synthèse n°2

Nom et prénom :…………………………………………….