

Lycée Elmessaadi ELFAH5	Mahmoud	DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2	Prof : BenHMIDENE Tarak
A.S 2013-2014 Le 4-3-2014		MATHEMATIQUES	4ème math Durée : 4 h

### **EXERCICE N°1(3points)**

Répondre par vrai ou faux en justifiant

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) = 1$

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \ln(1 + e^x)$  alors  $f^{-1}(x) = \ln(1 - e^x)$

3) Soit  $(E)$  une ellipse d'équation  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{e^2} = 1$  alors  $S(3, 0)$  est un sommet de l'axe non focale

### **EXERCICE N°2(6points)**

Dans la figure ci-joint  $ABCD$  et  $AIJK$  deux carrés orientés dans le sens direct  $I = A * D$

$O = A * C$

1) Soit  $S$  la similitude directe tels que  $S(K) = D$  et  $S(J) = C$

a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de  $S$ .

b) Montrer que  $A$  est le centre de  $S$  et en déduire  $S(I)$

2) Soit  $R$  une rotation de centre  $D$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  et  $h = S \circ R$

a) Montrer que  $h$  est une homothétie dont on précisera le rapport

b) Déterminer  $h(C)$

c) Soit  $\Omega$  le centre de  $h$  montrer que  $\vec{\Omega A} + 2\vec{\Omega C} = \vec{0}$  puis construire  $\Omega$

3) La perpendiculaire à  $(D\Omega)$  en  $D$  coupe  $(AJ)$  en  $E$

Préciser l'image de la droite  $(AC)$  par  $R$  et en déduire que  $R(\Omega) = E$

4) Déterminer alors  $S(E)$

5) Soit  $\sigma$  la similitude indirecte qui transforme  $I$  en  $D$  et  $J$  en  $C$

a) Donner le rapport de  $\sigma$

b) On pose  $\varphi = h_{(A, \frac{1}{2})} \circ \sigma$

préciser  $\varphi(I)$  et  $\varphi(J)$

c) Montrer que  $\varphi = S_{(AD)}$  et que  $\sigma = h_{(A, 2)} \circ S_{(AD)}$

### **EXERCICE N°3(4points)**

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé et  $(\mathcal{H})$  l'ensemble des points  $M(x, y)$  tel que

$$x^2 - 9y^2 - 2x - 36y - 44 = 0$$

1) a) Montrer que  $(\mathcal{H})$  est une hyperbole de centre  $\Omega(1, -2)$

b) Déterminer les coordonnées des sommets  $S$  et  $S'$ , des foyers  $F$  et  $F'$  et les équations des asymptotes  $\Delta$  et  $\Delta'$

c) Tracer  $(\mathcal{H})$

2) Soit  $A(-4, -\frac{2}{3})$

a) Montrer que  $A \in (\mathcal{H})$

b) Déterminer l'équation de la tangente à  $(\mathcal{H})$  en  $A$

3) Soient  $(C)$  et  $(C')$  deux cercles de centres respectifs  $\Omega$  et  $F$  et de rayons respectifs 3 et 1

$(C)$  et  $(C')$  se coupent en  $H$  et  $H'$

Montrer que les triangles  $\Omega H F$  et  $\Omega H' F$  sont des triangles rectangles en  $H$  et  $H'$

### **EXERCICE N°4(7points)**

**I°** Soit  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto 1 - x - x^2 - \ln x$

1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

b) Etudier le sens de variation de  $g$

2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que

$$0,7 < \alpha < 0,8$$

3) Donner le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$

**II°** Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} , f(x) = x + \frac{(x-1)\ln x}{x}$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et interpréter ce résultat graphiquement

2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite  $D : y = x$  est une direction asymptotique

c) Etudier la position relative de  $(C_f)$  par rapport à  $D$

- 3). a) Calculer  $f'(x)$  pour  $x > 0$  et vérifier que  $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$
- b) Montrer que  $f'(x) < 0$  pour  $x < \alpha$
- c) Dresser le tableau de variation de  $f$
- d) Montrer que la droite  $D: y=x$  est une tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $x_0=1$
- 4). Montrer que  $f(\alpha) = 2 + \alpha - \alpha^2 - \frac{1}{\alpha}$  et que  $0,64 < f(\alpha) < 1,06$
- 5). Tracer  $C_f$  et  $D$
- 6). Soit  $h$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]0, \alpha]$
- a) Montrer que  $h$  est une bijection de  $]0, \alpha]$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera
- b) Tracer la courbe  $Ch^{-1}$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

**BON TRAVAIL**