



**DEVOIR DE SYNTHESE N°2**  
**PROF – BELLILI MONGI**  
**DATE : 05 / 03 / 2013 , Durée : 04 h**



**EXERCICE N°1 (05 pts)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = x + \ln x - (\ln x)^2$  et  $\zeta$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1°) a- Calculer :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b- Etudier la position relative de  $\zeta$  et la droite  $\Delta$  d'équation :  $y = x$

2°) On a tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (voir annexe)

a- Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$

b- Tracer la courbe représentative  $\zeta'$  de la fonction  $f^{-1}$  réciproque de  $f$  dans le même repère

3°) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan limitée par les courbes  $\zeta$  et  $\zeta'$  et les droites d'équations :

$x = 1$  et  $x = e$

a- Montrer que :  $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

b- Calculer  $\mathcal{A}$

c- Dédurre  $\int_1^e f^{-1}(x) dx$

**EXERCICE N°2 (05 pts)**

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

1°) a- En utilisant une intégration par parties, calculer  $I_1$

b- Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et quelle converge

c- Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$  puis déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

2°) a- Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$

b- En déduire que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right)$

3°) Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_n = 1 + \frac{\ln 2}{2!} + \frac{(\ln 2)^2}{3!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!}$

a- Exprimer  $U_n$  en fonction de  $I_n$

b- En déduire que la suite  $(U_n)$  converge et calculer sa limite

**EXERCICE N°3 (05 pts)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On considère l'ensemble  $(\mathcal{E})$  des points  $M(x, y)$

Vérifiant :  $9x^2 + 4y^2 - 18x - 27 = 0$

1°) a- Montrer que  $M$  vérifie l'équation :  $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

b- Préciser la nature de  $(\mathcal{E})$  et déterminer les coordonnées de son centre  $\Omega$ ; ses sommets et son excentricité  $e$

c- Tracer  $(\mathcal{E})$

2°) pour tout réel  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , on considère le point  $N(2\cos\theta, 3\sin\theta)$  dans le repère orthonormé  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

a- Vérifie que pour tout réel  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $N \in (\mathcal{E})$

b- Montrer qu'une équation de la tangente  $T$  à  $(\mathcal{E})$  au point  $N$  est :  $3X.\cos\theta + 2Y.\sin\theta - 6 = 0$

c- La tangente  $T$  coupe l'axe des abscisses  $(\Omega, \vec{i})$  au point  $I$  et l'axe des ordonnées  $(\Omega, \vec{j})$  au point  $J$ .

d- Déterminer les coordonnées des points  $I$  et  $J$  dans le repère  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

e- Montrer que l'aire  $A(\theta)$  du triangle  $\Omega IJ$  est :  $A(\theta) = \frac{6}{\sin 2\theta}$

f- Déterminer les coordonnées du point  $N$  pour le quel  $A(\theta)$  est minimale

**EXERCICE N°4 (05 pts)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(1, -1, 0)$ ,  $B(-3, 0, 3)$  et  $C(1, 1, 2)$

1°) Montrer le plan  $P$  passant par les points  $A, B$  et  $C$  a pour équation cartésienne :  $x - 2y + 2z - 3 = 0$

2°) Vérifier que  $OABC$  est un tétraèdre puis calculer son volume  $V$

3°) Soit  $S$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tel que :  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 2 = 0$

Et le plan  $P_m$  d'équation :  $x - 2y + 2z - m = 0$  ou  $m \in \mathbb{R}$

a- Montrer que  $S$  est la sphère de centre le point  $I(2, -1, 1)$  et de rayon  $R=2$

b- Etudier, suivant les valeurs de  $m$ , la position relative de plan  $P_m$  et la sphère  $S$

c- Déduire que le plan  $P$  coupe  $S$  suivant un cercle  $\zeta$  dont on précisera le centre  $H$  et le rayon  $r$

4°) On considère l'homothétie  $h$  de centre  $I$  de rapport  $-4$ .

a- Donner l'expression analytique de l'homothétie  $h$ .

b- Déterminer une équation cartésienne du plan  $P'$ , image de  $P$  par  $h$ .

c- Préciser le centre et le rayon de la sphère  $S' = h(S)$

d- Préciser la position relative du plan  $P'$  et la sphère  $S'$



ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

NOM : ..... PRENOM : ..... CALSSE : .....

