Devoir de Synthèse N2

Exercice1 :(2 points)

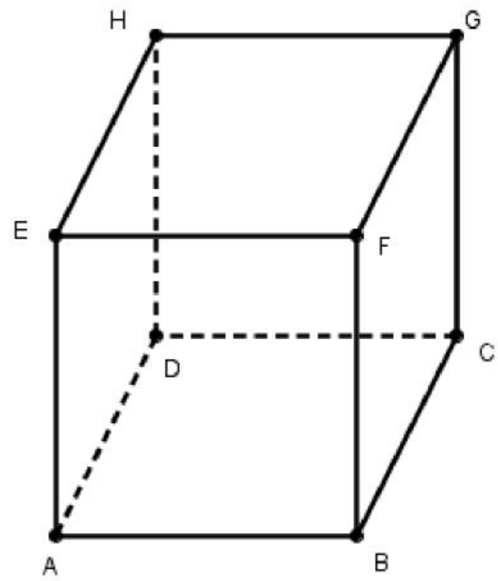
Cocher les bonnes réponses

1)$e^{-2\ln\left(\frac{1}{2}\right)+1}$ =	a)$\frac{-1}{4}e$	b)4e	c)e
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-5x} =$	a)$+\infty$	b)-∞	c)0
3)la fonction dérivée de x→ x^2e^x sur IR est	a)x→2xe^x	b)x→ x^2e^x	c)x→ $(x^2+2x)e^x$
4)soit I = $\int_{-1}^{1} sinx\,(\ln(\lvert x\rvert+1))dx$	a)I=0	b)I>0	c)I<0

Exercice 2 :(4points)

Soit ABCDEFGH un cube tel que AB = 1 , R le symétrique de B par rapport à A et

S = {M∈ $\mathcal{E}$ tel que $\left\|\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{2}$ }



1)a)Montrer que $\overrightarrow{DR}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{O}$

b)Montrer que S est une sphère de centre D et de rayon $\sqrt{2}$

c)Déterminer l'intersection de S et le plan (EBG)

2)Dans la suite soit le repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

a)Déterminer les composantes de $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BE}$

b)Déterminer l'aire du triangle BCE

c)Déterminer le volume du tétraèdre BCEG

3)a)Ecrire une équation du plan (BCE)

b)Soit Δ la perpendiculaire à (BCE) en E . Montrer que Δ coupe (BCA) en R

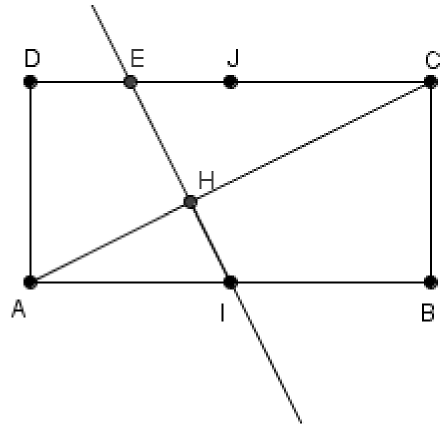
c)Calculer la distance de D à Δ . Que peut on déduire pour S et Δ ?

c)Montrer que S coupe (BCE) suivant un cercle dont on précisera les coordonnées de son centre et son rayon

Exercice 3 :(4 points)

Dans le plan orienté , soit ABCD un rectangle de sens direct tel que AB =2 AD = 2

On désigne par I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD] et par H le projeté orthogonal de I sur (AC) . La droite (IH) coupe (CD) en en E



Soit S la similitude directe telle que S(A) = I et S(B) = J

1)Déterminer le rapport et l'angle de S

2)a)Déterminer S((AC)) et S((BC)) . En déduire que S(C) = E

b)Construire le point D' = S(D)

3)Soit Ω le centre de S

a)Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AI]

b)Caractériser SoS

c)Déterminer le point I' = S(I) et montrer que I' est le milieu de [AC]

d)Montrer que $\Omega \in$ (AC) .En déduire que Ω = H

4)Soit K le milieu de [CI] $et\ \sigma$ la similitude indirecte transformant D en B et I en K

Le plan est rapporté au repère (A, $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}$)

a)Déterminer la forme complexe de σ

b)Montrer que C est le centre de σ et (IC) son axe

Exrecice 4 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$)

Soit E={ M(x , y) tel que $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ }

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de E puis tracer E

2)Soit pour tout x $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, F(x) = $\int_0^{2sinx} \sqrt{4-t^2}$ dt

a)Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer F'(x)

b)Montrer que F(x) = 2x + sin(2x) pour tout x $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et déduire que $\int_0^2 \sqrt{4-t^2}$ dt $= \pi$

d)Calculer l'aire de la région de du plan limitée par E

e)Soit S le solide engendré par la rotation de l'arc $\widehat{ABA'}$ de E autour de (o,$\vec{\imath}$) avec A(2,0) , B(0,1) et A'(-2,0)

Déterminer le volume de S

3)Soit $E' = \{ M(x,y)$ tel que $13\,x^2 + 7y^2 - 6\sqrt{3}xy - 16 = 0 \}$ et soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le points M' d'affixe $z' = (1 + i\sqrt{3})\,z$

a)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

b)Montrer que f (E) = E'

c)Tracer E' dans le même repère

Exercice 5 :(5 points)

A tout entier naturel non nul n , on associe la fonction f_n définie sur $[1,+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}$

1)a)Etudier les variations de f_1

b)Tracer sa courbe C_1

2)a)Montrer que f_n est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que $(f_n)'(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^{n-1}(n - 2\ln x)}{x^3}$

b)Dresser le tableau de variation de f_n et vérifier que son maximum est $y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$

3)a)Calculer pour tout $x > 1$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

b)Montrer que $y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$ et que $y_n \le \frac{1}{2} y_n$

c)En déduire que $y_{n+1} \le \frac{1}{e2^n}$ déduire la limite de (y_n)

4)Soit $I_n = \int_1^e f_n(t)\,dt$ pour tout $n \in IN*$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

a)Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties

b)Montrer que $0 \le I_n \le (e-1)\, y_n$ et déduire la limite de (I_n)

c)Montrer que pour tout $n > 0$, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!\,e}$

d)Montrer que $I_n = I_1 + \frac{2}{e} - S_n$ et déduire la limite de (S_n)

Correction

Exercice 1 : 1)b) 2)c) 3)c) 4)a)

Exercice 2 :

1) a) $\overrightarrow{DR}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}$ = $\overrightarrow{DR}+\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DC}$ = $\overrightarrow{BR}+2\overrightarrow{DC}$ = $2\,\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{DC}$ = $\vec{O}$ ($\overrightarrow{BR}=2\overrightarrow{BA}$ car A= B*R)

b)M∈ S eq $\|\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=2\sqrt{2}$ eq $\|2\overrightarrow{MD}\|=2\sqrt{2}$ eq MD= $\sqrt{2}$ eq M ∈ S(D, $\sqrt{2}$)

c) DB = DG = DE =$\sqrt{2}$ donc S coupe (EBG) suivant le cercle circonscrit au triangle EBG

2)a)B(1,0,0) , C(1,1,0) ,E(0,0,1) , $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

b)Aire (BCE) = $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BE}\|$ = $\frac{1}{2}\sqrt{1+0+1}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c)Volume (BCEG) = $\frac{1}{6}|(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BE}).\overrightarrow{BG}|$ = $\frac{1}{6}$(1.0+0.1+1.1) $\frac{1}{6}$ car $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

3)a) $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (BCE) donc (BCE): x + z + d = 0 comme B ∈ (BCE) donc d = -1 Donc (BCE) :x + z -1= 0

b)Ona R(-1,0,0) et Δ passe par E et de vecteur directeur $\vec{u}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BE}$ donc Δ $\begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=\alpha+1\end{cases}$ et M(x,y,z) ∈ $\Delta\cap(BCE)$ eq $M(-1,0,0)=R$

c)d(D,Δ) = $\frac{\|\overrightarrow{DE}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$ donc S et Δ sont sécants

d)d(D,(BCE))= $\frac{|0+0-1|}{\sqrt{1+1}}$ =$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $<\sqrt{2}$ donc (BCE) coupe suivant un cercle de rayon r =$\sqrt{2-\frac{1}{2}}$ = $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et de centre H le projeté orthogonal de D sur (BCE)

On pose H(x,y,z) on a H ∈ (BCE) et $\overrightarrow{DH}$ colinéaire à $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ on trouve H ($\frac{1}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$)

Exercice 3 :

1)le rapport de S est $\frac{IJ}{AB}=\frac{1}{2}$, son angle est $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IJ})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

2)a)S((AC)) passe par s(A) =I et perpendiculaire à(AC) donc S(AC)) = (IH)

S((BC))passe par S(B) =J et perpendiculaire à (BC) donc S(BC))=(JC)

C∈ (AC)∩ (BC) donc s(C) ∈ S((AC))∩ S((BC)) donc S(C)∈ (IH) ∩ (JC) donc S(C)=E

b)D∈(AD) donc D' ∈ à la perpendiculaire à (AD) passant par I donc S(D)∈(AB)

et D∈(CD) donc D' ∈ à la perpendiculaire à (CD) passant par E d'où la construction de D'

3)a)S similitude directe d'angle $\frac{\pi}{2}$,S(Ω) $=\Omega$ et S(A) =I donc $(\Omega A)\perp(\Omega\mathrm{I})$ donc Ω ∈ au cercle de diamètre [AI]

b)SoS est une similitude directe de centre Ω de rapport $\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$ donc SoS est une homothétie de rapport $\frac{1}{4}$ et de centre Ω

c)I est le milieu de [AB] donc S(I)=I' est le milieu de [IJ] or JCIA est un parallélogramme donc I'=I*J=A*C

d)SoS(A) = I' et SoS=h(Ω,$\frac{-1}{4}$) donc $\Omega\in(AI')et\ (AI')=(AC)donc\ \Omega\in(AC)$

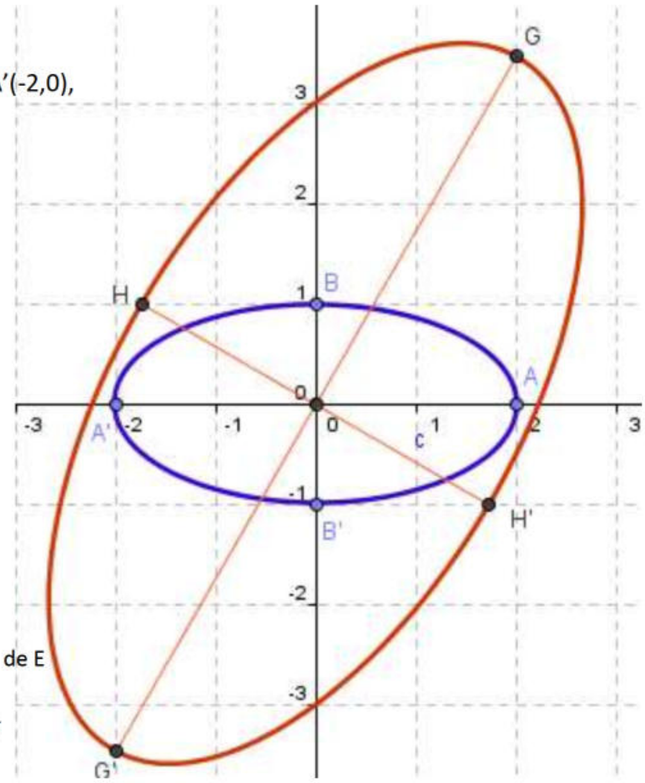
On a $\Omega \in \mathcal{C}[AI] \cap (AC)$ donc $\Omega = A$ ou H comme $S(A) = I$ donc $\Omega = H$

4)Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' image de M par σ donc z' = a$\bar{z}$ +b .$\sigma(D) = B$, $\sigma(I) = K, z_D = i, z_B = 2, z_I = 1$ et $z_K = \frac{3+i}{2}$

On trouve a = $\frac{i}{2}$ et b = $\frac{3}{2}$

b)Le centre de σ a pour affixe $\frac{a\bar{b}+b}{1-|a|} = \frac{\frac{i}{2}\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2}$ = 2+i l'axe de σ port la bissectrice intérieure de (CB,CD) c'est donc (AC)

Exercice 4 :



1)M(x,y) ∈E eq $\frac{x^2}{2^2} + y^2$ =1 Donc E est une ellipse de sommets principaux A(2,0),A'(-2,0),

de sommets secondaires B(0,1),B'(0,-1)de foyers F($\sqrt{3}$,0) ,F'(-$\sqrt{3}$,0)

de directrices D : x=$\frac{4}{\sqrt{3}}$, D' : x=$\frac{-4}{\sqrt{3}}$ et d'excentricité e = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2)a)Soit u(x) =2sinx et f(t) = $\sqrt{4-t^2}$

U est dérivable sur [0,$\frac{\pi}{2}$] et f est continue sur [-2,2]

donc F est dérivable sur [0,$\frac{\pi}{2}$] et F'(x) = u'(x) f(u(x))=4$(cosx)^2$=2(1+cos2x)

b)F(x) =2x +sin(2x) +k or F(0)=0 donc F(x) = 2x +sin2x et

en particulier F($\frac{\pi}{2}$)=π Donc $\int_0^2 \sqrt{4-t^2}$ dt = π

d)Soit A l'aire de la région du plan limitée par E et A' l'aire de la région limitée par $\widehat{AB}$ de E

,l'axe des abscisses et x=0 or $\widehat{AB}$ = Cg où g(x) =$\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ donc A =2 $\int_0^2 \sqrt{4-t^2}$ dt = 2π

e)Volume(S) = $\pi \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\right)^2$ dt = $\frac{\pi}{4}\int_{-2}^{2}(4-x^2)$ dt = $\frac{\pi}{4}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$ =$\frac{16\pi}{12}$

3)a)a=1+i$\sqrt{3}$ = $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc f est une similitude directe de rapport 2 d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre O

b)Soit M(x,y) et M'(x',y') = f(M) donc x'= x-$\sqrt{3}$ y et y' =$\sqrt{3}$ x + y pour montrer que f(E)=E' on peut montrer que f-1(E')=E

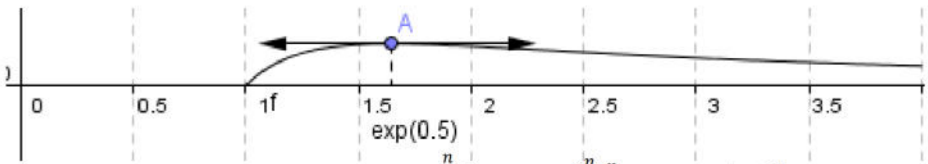
donc M'(x',y')∈E' eq 13 $x'^2 + 7y'^2 - 6\sqrt{3}x'y' - 16 = 0$ eq 13 $(x-\sqrt{3}y)^2 + 7(\sqrt{3}x+y)^2 - 6\sqrt{3}(x-\sqrt{3}y)(\sqrt{3}x+y) - 16 = 0$ eq

$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ eq 16x^2+ 64y^2 - 16 = 0 eq x^2 + 4y^2 -1 = 0

c)E' est une ellipse de sommet G=f(A) , G'=f(A') , H = f(B) et H'=f(B')

Exercice5 :

1)a)f_1(x) = $\frac{lnx}{x^2}$, $(f_1)'$(x) = $\frac{(1-2lnx)}{x^3}$ b)



2)b)f_n ateind son maximum en $e^{\frac{n}{2}}$ et ce maximum est égal à yn= fn($e^{\frac{n}{2}}$)= = $\frac{1}{n!}\frac{(ln\,e^{\frac{n}{2}})^n}{\left(e^{\frac{n}{2}}\right)^2}$ == $\frac{1}{n!}\frac{(\frac{n}{2})^n}{e^n}$ == $\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$

3)**a)** $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{lnx}{n+1}$ **b)** pour x =$e^{\frac{n+1}{2}}$, $\frac{f_{n+1}(e^{\frac{n+1}{2}})}{f_n(e^{\frac{n+1}{2}})} = \frac{\ln(e^{\frac{n+1}{2}})}{n+1}$ eq $\frac{y_{n+1}}{f_n(e^{\frac{n+1}{2}})} = \frac{1}{2}$ eq $y_{n+1} = \frac{1}{2}f_n(e^{\frac{n+1}{2}})$ **on a** $f_n(e^{\frac{n+1}{2}}) \leq y_n$ d'où

$y_{n+1} \leq \frac{1}{2}y_n$ c)En écrivant l'inégalité précédente successivement pour 1 ,2 3 , ,n-1 et en prenant le produit terme à terme on obtient le résultat 0≤ $y_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} y_1$ et y_1 = $\frac{1}{2e}$

4)a)I1=$\frac{-2}{e}$+1 **b)** 0≤ $f_n(x) \leq y_n$ donc 0≤ $\int_1^e f_n(x)dx \leq \int_1^e y_n dx$ donc 0≤ $I_n \leq (e-1)y_n$,lim I_n=0 car lim y_n=0