Le sujet se compose de 3 pages sont numérotés de : 1 à 3

Exercice N°1 : (3 pts)

Pour chacune des propositions suivantes une seule est exacte, le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Un inverse modulo 13 de 8 est :

a. 7 **b.** 5 **c.** 11

2) Le volume $\mathcal{V}$ du solide engendré par la rotation de l'arc $[\widehat{AB}] = \{M(x,y), 2 \leq x \leq e \; et \; y = \frac{1}{\sqrt{x ln^2(x)}}\}$ autour de l'axe des abscisses est : **a.** $\pi(\frac{1-ln\,2}{ln\,2})$ **b.** $\pi(1 - ln2)$ **c.** $\pi(ln2 - 1)$

3) La courbe suivante est celle d'une fonction g définie sur IR par $g: x \longmapsto a^x$ alors :

a. $a = 2$ **b.** $a = \frac{1}{4}$ **c.** $a = \frac{1}{2}$

4) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, Soit f une similitude indirecte de rapport 2, de centre I d'affixe 1 + i et d'axe (Δ): y = x.
Alors l'écriture complexe de f est:

a. $z' = (1+i)\bar{z} - 2$ **b.** $z' = 2i\bar{z} - 1 - i$ **c.** $z' = 2iz - 1 - i$

Exercice N°2 : (3,5 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $5x - 4y = 5$

2) Soit $p \in \mathbb{Z}\backslash\{1\}$ et $S_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* \; on \; a : \; S_n = \frac{1-p^n}{1-p}$

b. En déduire que $p^n \wedge (1-p) = 1$.

3) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_n): $p^n x + (1-p)y = p$

a. Prouver que l'ensemble des solutions de l'équation (E_n) est non vide.

b. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): p^n x + (1-p)y = 1$

c. En déduire les solutions de (E_n)

d. Trouver alors l'ensemble des solutions de l'équation$10^n x - 2^{n+2} y = 10.\,2^{n-1}$

Exercice N°3 : *(4 pts)*

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct OAB et soit C le milieu de segment [AB]. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon OB, la demi droite [CO) coupe $\mathscr{C}$en F et D le symétrique de A par rapport à O

1) Soit f la similitude directe de centre A et transforme C en O.

a. Déterminer le rapport et l'angle de f.

b. Montrer que $\mathrm{f(B) = D}$.

c. Soit J le projeté orthogonal de A sur (BF), montrer que $\mathrm{f(J) = F}$.

2) Soit K le point tel que AKC un triangle équilatéral direct, et soit E le milieu de [AK]

a. Montrer que f(E)=C

b. Montrer que les points E, C et J sont alignés.

3) Soit $= foS_{(EC)}$, ou $S_{(EC)}$ est la symétrie orthogonal d'axe (EC).

a. Déterminer la nature et le rapport de g

b. Déterminer $g(E)\,, g(C)\ et\ gog(E)$

c. Soit Ω le centre de g, montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(O;1)\ et\ (E;-4)$

d. Construire Ω et déterminer l'axe Δ de *g* et la construire.

Exercice N°4 : *(5,5 pts)*

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = e^{2x} - 2e^x$, et $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan.

1) **a.** Dresser le tableau de variation de f

b. Construire la courbe $\mathscr{C}$.

2) On désigne par g la restriction de f sur $[0; +\infty[$

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur J et construire sa courbe $\mathscr{C}'$ dans le même repère.

c. Démontrer que $\forall x \in \mathrm{J}\,, g^{-1}(x) = \ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$

3) On donne une fonction F définie par : $\begin{cases} \mathrm{F(x)} = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,dt \ si\ x > 0 \\ \mathrm{F(0)} = -ln2 \end{cases}$

a. Montrer en utilisant l'inégalité d'accroissement fini que $\forall x \in]0, +\infty[\, , 0 < \frac{f(x)+1}{x} < f'(x)$

b. Montrer que $\forall\, x > 0, on\ a\colon 0 < F(x) + ln2 < f(2x) - f(x)$

c. En déduire la continuité et la dérivable de F à droite en 0 et que $\mathrm{F}_{\mathrm{d}}'(0) = 0$

4) **a.** Vérifier que $\forall x > 0, F(x) \geq f(x).\, ln2$

b. Etudier la branche infinie de F au voisinage de $(+\infty)$.

5) **a.** Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\mathrm{F}'(x) = \frac{f(2x)-f(x)}{x}$

b. Dresser alors le tableau des variations de F

Exercice N°5 : *(4 pts)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur IR par $f_n(x) = n(2-x)e^x - 1$, et C_n la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan.

1) **a.** Dresser le tableau de variation de f_1.

b. Etudier les branches infinis de C_1.

c. Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha_1\ et\ \beta_1$ tels que :$\alpha_1 < 0\ et\ \beta_1 \in]1,2[$

2) On donne ci-dessous le tableau de variation de f_n pour $n \geq 1$

Montrer que l'équation (E_n): $f_n(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha_n\ et\ \beta_n$ dans IR tel que :

$\alpha_n < 0\ et\ 1 < \beta_n < 2.$

3) **a.** Montrer que t est une solution de l'équation (E_n) si et seulement si $f_{n+1}(t) = (2-t)e^t$

b. Montrer alors que $f_{n+1}(\beta_n) \geq 0$ et que la suites (β_n) est croissante

c. En déduire que la suite (β_n) est convergente et montrer que $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 2$.

4) **a.** Montrer que la suite (α_n) est décroissante.

b. Montrer que la suite (α_n) est non minorée et en déduire sa limite