

Mathématiques		 Devoir de Synthèse N°2
Lycée Ghannouch		
4 ^{ème} Math	Durée : 4 heures	Prof : Taieb
Date : le 05 /02/2013	Coefficient : 4	

Exercice n°1 : (2points)

Répondre par vrai ou faux **en justifiant votre réponse** :

1) Soit $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$ pour tout entier naturel n.

a) $I_1 = \ln(e+1)$

b) $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n}(e^n - 1)$

2) On a rapporté le plan à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit (Γ) la parabole d'équation réduite $y^2 = 4x$

a) La tangente à (Γ) au point A (1,2) a pour équation : $x + y + 1 = 0$

b) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On désigne par $C = \{M(x,y) \in (\Gamma) \text{ tel que } 0 \leq x \leq 2 \text{ et } y \geq 0\}$

Le volume V du solide S obtenu par rotation de C au tour de l'axe (Ox) est $V = 8\pi$

Exercice n°2 : (5 points)

L'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On donne les points A (1, 1,0), B (0, 1,1), C (1, -1,-1) et D (1,-1,1)

1-a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan P

b) Calculer le vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$

c) En déduire qu'une équation cartésienne de plan P est : $2x - y + 2z - 1 = 0$.

d) Calculer l'aire de triangle ABC.

2- a) Calculer le volume de tétraèdre ABCD

b) En déduire la distance de D au plan P

3- Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) tel que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z - 4 = 0$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon

b) Montrer que l'intersection de la sphère S et du plan P est un cercle ζ . Déterminer les coordonnées du centre H et le rayon r du cercle ζ

4- Soit h l'homothétie de centre D et de rapport -3

a) Déterminer l'expression analytique de h

b) Déterminer une équation cartésienne de S' et Q les images respectives de S et P par h

c) Etudier l'intersection de S' et Q

Exercice n°3 : (3 points)

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $\sqrt{2}i$, $-2+2i$ et $2i$.

1. On considère l'application

$$S: \begin{array}{l} P \longrightarrow P \\ M(z) \longrightarrow M_1(z_1) \text{ tel que } z_1 = \left(\frac{-1+i}{2}\right)z + 1+i \end{array}$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S .

2. Soit f la similitude directe qui transforme A en B et O en C .

a. Montrer que pour tout point $M(z)$, d'image $M'(z')$ par f , on a $z' = \sqrt{2}iz + 2i$.

b. En déduire les éléments caractéristiques de f .

c. Montrer que $f \circ f$ est une homothétie que l'on caractérisera.

3.a. Déterminer l'affixe du point $S(C)$.

b. Montrer que $S \circ f$ est une rotation que l'on caractérisera.

Exercice n°4 : (6 points)

I) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + 1 + \ln x$.

a) Etudier les variations de g sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$

et que $0,27 < \alpha < 0,28$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

3) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1.

b) Tracer T et (C) en précisant les branches infinies de (C) .

II) Soit la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^{2x} f(t) dt$

1) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+ et calculer $F'(x)$.

2) Soit $x \geq 0$

a) Montrer que pour tout réel t de $[1, x]$; $\frac{1}{2} \ln t \leq f(t) \leq t \ln t$.

- b) Calculer les intégrales $I(x) = \int_1^{2x} \ln t \, dt$ et $J(x) = \int_1^{2x} t \ln t \, dt$
- c) En déduire que $x \ln(2x) - x + \frac{1}{2} \leq F(x) \leq 2x^2 \ln(2x) - x^2 + \frac{1}{4}$.
- d) Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{F(x)}{x} \right)$.
- 3) On donne $F(0) \approx 0,2$. Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Exercice n° 5: (4 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} \, dx$.

1) 3) a) montrer à l'aide d'une intégration par partie que $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in [1, e]$ on a :

$$\frac{(\ln x)^n}{xe} \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{(\ln x)^n}{x}$$

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

3) a) montrer à l'aide d'une intégration par partie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$$

b) montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Bon Travail