DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 2

Exercice 1 *(3 points)*

Pour chaque question, indiquer par a), b), c) l'unique bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

1. **a)** $2013^{62} \equiv 1(\mod 5)$. **b)** $2013^{62} \equiv 4(\mod 13)$. **c)** $2013^{62} \equiv 1(\mod 13)$.
2. Soit n un entier tel que : $(11n) \wedge (11^2 \times 5^2 \times 13^2) = 143$ alors :
   a) $n \equiv 0(\mod 13)$. **b)** $n \equiv 0(\mod 11)$ **c)** $n \equiv 0(\mod 5)$.
3. $\lim\limits_{x \to 0^-} xe^{-\frac{1}{x}} =$
   a) 0. **b)** $+\infty$. **c)** $-\infty$.
4. soit n un entier tel que $n \equiv 19(\mod 20)$ alors le reste modulo 20 de $n^{100} + n^{181}$ est :
   a) 19. **b)** 2. **c)** 0.

Exercice 2 *(5 points)*

1. (a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11.
   (b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5.
   (c) En déduire que $(6^{40} - 1)$ est divisible par 55.
2. Dans cette question x et y désigne des entiers relatifs.
   (a) Montrer que l'équation $(E) : 17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.
   (b) Vérifier que le couple $(-7, -3)$ est une solution de (E) puis résoudre (E).
   (c) Vérifier qu'il existe un unique entier x_0 que l'on précisera tel que :
   $$0 < x_0 < 40 \text{ et } 17x_0 \equiv 1(\mod 40).$$
3. Pour tout entier naturel a montrer que :
   si $\left(a^{17} \equiv b(\mod 55) \text{ et } a^{40} \equiv 1(\mod 55) \right)$ alors $b^{33} \equiv a(\mod 55)$

Exercice 3 *(6 points)*

Dans le plan orienté on considère un losange ABCD tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[\mod 2\pi]$
On désigne par E le symétrique de A par rapport à C et par F le symétrique de A par rapport à B.
Soir R la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
Soit S la similitude directe qui transforme D en E et C en F.

A) On pose $h = S \circ R^{-1}$.

1. Déterminer $h(C)$ et $h(B)$.
2. En déduire que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
3. Déterminer les éléments caractéristiques de S.

B) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(E) = C$ et $\sigma(F) = B$.

1. Déterminer le rapport de σ. En déduire que σ admet un centre qu'on notera Ω.
2. On désigne par Δ l'axe de σ et G le point d'intersection des droites Δ et (CE).
   On pose $G' = \sigma(G)$. Montrer que $\overrightarrow{\Omega G'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega G}$.

3. (a) Étant donnée une droite $\mathcal{D}$ du plan et $\mathcal{D}'$ son image par S_Δ.
   Montrer que si $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ alors $\mathcal{D} \parallel \Delta$.
   (b) Déduire que $(EF) \parallel \Delta$.
4. Soit $E' = S_\Delta(E)$.
   (a) Montrer que G est le centre de gravité du triangle $\Omega EE'$. En déduire que $\overrightarrow{GE'} = -2\overrightarrow{GC'}$.
   (b) Construire le point G, l'axe Δ et le centre Ω de σ.

Exercice 4 *(6 points)*

1. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \dfrac{\ln x}{2}$.
   (a) Dresser le tableau de variation de g.
   (b) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ puis dresser le tableau de variation de f.
   (b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$(unité graphique = 2 cm).
   (c) Calculer à l'aide d'une intégration par partie l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 f(x)dx$. En déduire l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$, $x = 2$ et $y = 0$.
3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.
   (a) Montrer que pour tout entier k tel que : $0 \leqslant k \leqslant n-1$,
   $$\frac{1}{n}\, f\left(1+\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leqslant \frac{1}{n}\, f\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$
   (b) Montrer que : $J + \dfrac{f(1)}{n} \leqslant u_n \leqslant J + \dfrac{f(2)}{n}$.
   (c) Déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.