

Exercice 1(3pts)

Donner la réponse correcte aucune justification n'est demandée.

1) Soit H l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ d'excentricité e.

a) $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $e = \sqrt{3}$ c) $e = \frac{3}{2}$

1) Les solutions dans \mathbb{Z} de l'équation $x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$ sont de la forme :

a) $2p, p \in \mathbb{Z}$; b) $6p + 2; p \in \mathbb{Z}$; c) $6p + 2; p \in \mathbb{Z}$ ou $6p + 5; p \in \mathbb{Z}$

2) Soit g l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M(Z)

on associe le point M'(Z') tel que $Z' = 2i\bar{Z} + 1 + i$. g est une :

a) Similitude directe de rapport 2 et de centre $\Omega(1 - i)$.

b) Similitude indirecte de rapport 2 et de centre $\Omega(-1 - i)$.

c) Homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-1 - i)$.

Exercice 2(5pts)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la parabole P d'équation $y^2 = 2x$ et on désigne par M et M' les points de coordonnées

respectivement $\left(\frac{t^2}{2}, t\right)$ et $\left(\frac{1}{2t^2}, -\frac{1}{t}\right)$ où t est un réel non nul.

1) a) Déterminer les coordonnées du foyer F de P et l'équation de sa directrice D.

b) Tracer P et placer le foyer F.

c) Vérifier que les points M et M' appartiennent à P.

2) On désigne par T et T' les tangentes à P respectivement en M et M'.

a) Montrer que les points M, F et M' sont alignés.

b) Ecrire les équations des tangentes T et T'. En déduire que $T \perp T'$.

c) On pose H l'intersection de T et T'. Montrer que H varie sur une droite fixe quand t décrit \mathbb{R}^* .

Exercice 3: (4 pts)

- 1) a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11.
b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5.
c) En déduire que $6^{40} \equiv 1 \pmod{11}$ et que $6^{40} \equiv 1 \pmod{5}$
d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55
- 2) Dans cette question x et y désignent deux entiers relatifs.
 - a) Vérifier que l'équation (E) : $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.
 - b) Vérifier que l'équation (E') : $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.
 - c) Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation (E'). En déduire le reste modulo 40 de 17.

Exercice 4: (8 pts)

- I) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
- 1) a) Montrer que f est continue en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
 - 2) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + 1 + \ln x$.
 - a) Etudier les variations de g sur $]0, +\infty[$.
 - b) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$ et que $0,27 < \alpha < 0,28$.
 - c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.
 - 3) a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
 - 4) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.
 - a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1.
 - b) Tracer T et (C) en précisant les branches infinies de (C).
- II) Soit la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^{2x} f(t) dt$
- 1) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+ et calculer $F'(x)$.
 - 2) Soit $x \geq 0$
 - a) Montrer que pour tout réel t de $[1, x]$; $\frac{1}{2} \ln t \leq f(t) \leq t \ln t$.

b) Calculer les intégrales $I(x) = \int_1^{2x} \ln t \, dt$ et $J(x) = \int_1^{2x} t \ln t \, dt$

c) En déduire que $x \ln(2x) - x + \frac{1}{2} \leq F(x) \leq 2x^2 \ln(2x) - x^2 + \frac{1}{4}$.

d) Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{F(x)}{x} \right)$.

3) On donne $F(0) \approx 0,2$. Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Bon Travail

Exercice 1(3pts)

- 1) a) ; 2) c) ; 3) b)

Exercice 2 (4pts)

1) $P : y^2 = 2x$

a) $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $D : x = -\frac{1}{2}$

b) (voir figure)

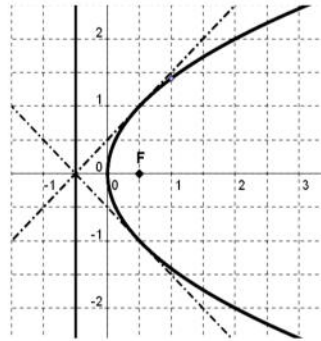
c) On a $M\left(\frac{t^2}{2}, t\right)$, $M'\left(\frac{1}{2t^2}, -\frac{1}{t}\right)$ et $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

donc $\overrightarrow{MF}\left(\frac{t^2-1}{2}, \frac{1}{t}\right)$ et $\overrightarrow{M'F}\left(\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2}, -\frac{1}{t}\right)$

$$\det(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{M'F}) = -\frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - t\left(\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{t}{2} + \frac{1}{2t} - \frac{1}{2t} + \frac{t}{2} = 0$$

\overrightarrow{MF} et $\overrightarrow{M'F}$ sont colinéaires et, donc M, M' et F sont alignés.



2) a) $T : y \cdot y_M = p(x + x_M) \Rightarrow T : y = \frac{1}{t}\left(x + \frac{t^2}{2}\right)$

$$\Rightarrow T : y = \frac{1}{t}x + \frac{t}{2}$$

De même $T' : y = -tx - \frac{1}{2t}$

$T \perp T'$ car $-t \times \frac{1}{t} = -1$

b) On pose $H(x_H, y_H) \in T \cap T'$. On a donc $\frac{1}{t}x_H + \frac{t}{2} = -tx_H - \frac{1}{2t}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{t} + t\right)x_H = -\frac{1}{2t} - \frac{t}{2} = -\frac{t^2+1}{2t} \Rightarrow \frac{t^2+1}{t}x_H = -\frac{t^2+1}{2t} \Rightarrow x_H = -\frac{1}{2}$$

Ainsi, si t décrit \mathbb{R}^* , H décrit la directrice D.

Exercice 3 (4pts)

1) a) $6^5 = 7776 = 11 \times 706 + 10 \Rightarrow 6^5 \equiv 10 \pmod{11}$
 $\Rightarrow 6^5 \equiv -1 \pmod{11}$ ou encore $6^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

b) $6^2 = 36 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 6^4 \equiv 1 \pmod{5}$

c) $6^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 6^{40} \equiv 1 \pmod{11}$

$6^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 6^{40} \equiv 1 \pmod{5}$

d) $\begin{cases} 6^{40} \equiv 1 \pmod{11} \\ 6^{40} \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow 6^{40} \equiv 1 \pmod{5 \times 11}$
 $5 \wedge 11 = 1$
 $\Rightarrow 6^{40} - 1 \equiv 0 \pmod{55}$

2) a) $65 \wedge 40 = 5 \neq 1$ donc (E) n'admet pas de solutions.

b) $17 \wedge 40 = 1$ donc (E') admet au moins une solution.

c) Remarquons que $(-7, -3)$ est une solution particulière de (E').

(Algorithme d'euclide)

$$\begin{cases} 17x - 40y = 1 \\ 17 \times (-7) - 40 \times (-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 17(x + 7) = 40(y + 3)$$

$\Rightarrow 17$ divise $(y + 3)$ et 40 divise $(x + 7)$ car $17 \wedge 40 = 1$

$\Rightarrow y = 17k - 3$ et $x = 40k - 7$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Inversement ; Si $x = 40k - 7$ et $y = 17k - 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$17(40k - 7) - 40(17k - 3) = -119 + 120 = 1$.

Ainsi $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(40k - 7, 17k - 3); k \in \mathbb{Z}\}$

Pour $k = 1$, $(33, 14)$ est une solution de (E') c'est-à-dire

$17 \times 33 - 40 \times 14 = 1 \Rightarrow 17 \times 33 = 40 \times 14 + 1$ ou encore

$17 \times 33 \equiv 1 \pmod{40}$ et par suite 33 est l'inverse modulo 40 de 17.

Exercice4 (10pts)

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x+1} = 0 = f(0)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{(x+1)} = -\infty$. F n'est pas dérivable à gauche en 0 et (C) admet au point O une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

2) a) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$;

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \forall x > 0$. ainsi g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b) g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$g(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$. donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 0$. De plus $g(0.27) \approx -0.03 < 0$
 $g(0.28) \approx 0.07 > 0$

donc $0,27 < \alpha < 0,28$.

c)

| | | | |
|------|---|----------|-----------|
| x | 0 | α | $+\infty$ |
| g(x) | - | 0 | + |

3) a) $x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, $x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de plus $\forall x > 0, x + 1 \neq 0$ donc f est dérivable sur

$$]0, +\infty[, \text{ et } \forall x > 0 ; f'(x) = \frac{(\ln x + x \cdot \frac{1}{x})(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x \ln x + \ln x + x + 1 - x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

b) Le signe de f' est le signe de g(x).

| | | | |
|-------|---|-------------|-----------|
| x | 0 | α | $+\infty$ |
| f'(x) | - | 0 | + |
| f | 0 | $g(\alpha)$ | $+\infty$ |

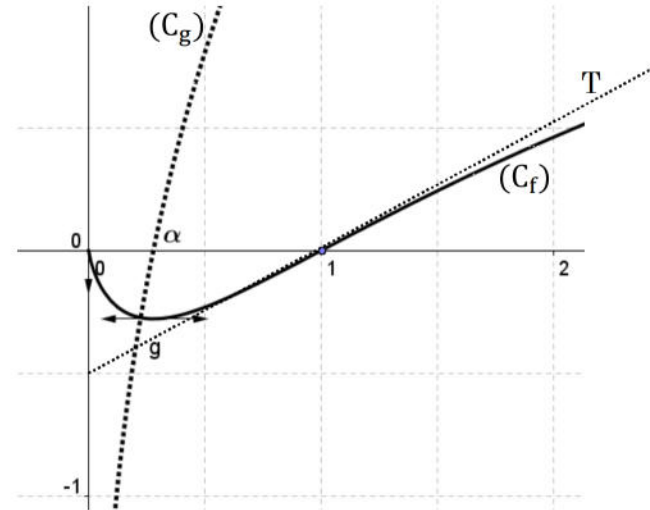
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

4) a) $T : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \frac{1}{2}(x - 1) + 0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$$T : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = 0$



D)

1) $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $[0, +\infty[$

$x \mapsto f(x)$ est Continue sur $[0, +\infty[$

Donc F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$;

$$F'(x) = 2 f(2x).$$

2) a) $\forall t \geq 1$

$$f(t) - t \ln t = \frac{t \ln t}{t+1} - t \ln t = (t \ln t) \left(\frac{t}{t+1} - 1 \right)$$

$$= (t \ln t) \left(\frac{-1}{t+1} \right) \leq 0$$

$$f(t) - \frac{1}{2} \ln t = \frac{t \ln t}{t+1} - \frac{1}{2} \ln t = (\ln t) \left(\frac{t}{t+1} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= (\ln t) \left(\frac{t-1}{t+1} \right) \geq 0$$

$$\text{Ainsi } \forall t \geq 1 ; \frac{1}{2} \ln t \leq f(t) \leq t \ln t.$$

$$b) I(x) = \int_1^{2x} \ln t \, dt = \left[t \ln t - t \right]_1^{2x} = 2x \ln 2x - 2x + 1$$

$$J(x) = \int_1^{2x} t \ln t \, dt$$

$$\text{On pose } \begin{cases} u(x) = \ln t \\ v'(x) = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{t} \\ v'(x) = \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Alors } J(x) = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_1^{2x} - \int_1^{2x} \frac{t}{2} dt = 2x^2 \ln 2x - \frac{1}{4} \left[t^2 \right]_1^{2x}$$

$$= 2x^2 \ln 2x - x^2 + \frac{1}{4}$$

$$c) \text{ On a } \forall t \in [1, x]; \frac{1}{2} \ln t \leq f(t) \leq t \ln t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_1^{2x} \ln t \, dt \leq \int_1^{2x} f(t) dt \leq \int_1^{2x} t \ln t \, dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I(x) \leq F(x) \leq J(x) \text{ et par suite}$$

$$x \ln(2x) - x + \frac{1}{2} \leq F(x) \leq 2x^2 \ln(2x) - x^2 + \frac{1}{4}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(2x) - x + \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(2x) - 1 + \frac{1}{2x}) = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(2x) - x + \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x) - 1 + \frac{1}{2x} = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$$

3) F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$; $F'(x) = 2 f(2x)$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x \ln(2x)}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

| | | | | |
|-------|-----|-----|-----------|-----------|
| x | 0 | 1/2 | $+\infty$ | |
| F'(x) | 0 | - | 0 | + |
| F | 0,2 | | 0 | $+\infty$ |

F admet une branche parabolique de direction $(0, \vec{j})$.

