

Une grande importance sera attachée à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation

EXERCICE 1: (3pts)

Cocher la réponse exacte :

1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)}{x^2}$ est égale à :

0 ; 1 ; $+\infty$.

2) L'intégrale $\int_2^8 \frac{\ln(x)}{x} dx$ vaut :

$2(\ln 2)^2$; $(\ln 2)^2$; $4(\ln 2)^2$

3) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $u_n = \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx$ et $S = \sum_{k=2}^7 u_k = u_2 + u_3 + \dots + u_7$. La somme S vaut :

$4(\ln 2)^2$; $(\ln 2)^2$; $2(\ln 2)^2$

4) L'application f qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 2i\bar{z} - 3$ est une similitude indirecte de centre $A(1+2i)$ et d'axe :

$\Delta: x + y + 1 = 0$; $\Delta: x - y + 1 = 0$; $\Delta: x + y - 1 = 0$

EXERCICE 2:(4pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, on considère les points $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(-2,0,0)$ et $D(-2,-2,-2)$.

1)a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de diamètre [AC].

2) Soit E(-1,1,0) et P le plan passant par B et perpendiculaire à la droite (OE).

a) Donner une équation cartésienne du plan P.

b) Montrer que P et S sont sécants suivants un cercle ζ dont on déterminera le centre H et le rayon r.

3) Soit h l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$

tels que
$$\begin{cases} x' = -3x - 4 \\ y' = -3y + 4 \\ z' = -3z \end{cases}$$

- a) Déterminer la nature de h et préciser ses éléments caractéristiques. déterminer $O' = h(O)$.
 - b) Calculer le volume v de tétraèdre ABCD et déduire le volume v' du tétraèdre image de ABCD par h.
 - c) Déterminer la sphère (S') image de (S) par h.
- 4) Déterminer les translations qui transforme P en un plan tangent à (S') et de vecteurs orthogonaux à P.

EXERCICE3: (4pts)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et $(\sqrt{2}-1)(1-i)$. Soit g_α l'application du plan dans le plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = -\frac{\sqrt{2}}{4}(\alpha+i)z + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- 1) Déterminer α pour que g_α soit une translation.
- 2) Montrer que g_1 est une similitude directe et déterminer ses éléments caractéristiques.
- 3) Déterminer la transformation complexe associée à l'homothétie h de centre B et de rapport $-\sqrt{2}$.
- 4)a) Montrer que l'expression complexe de l'application $S = g_1 \circ h$ est : $z' = \frac{1}{2}(1+i)z$.

b) Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de S.

5) On pose : $M_0 = A$; $M_1 = S(M_0)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $M_{n+1} = S(M_n)$. Soit z_n l'affixe de M_n .

a) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n puis déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{e^{in\frac{\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^n}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $Aff(\overrightarrow{M_n M_{n+1}}) = \frac{e^{i(n+3)\frac{\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^{n+1}}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose L_n la longueur du polygone $M_0 M_1 M_2 \dots M_n$.

Montrer que $L_n = (\sqrt{2}+1) \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \right]$. Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S^n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{n \text{ fois}}$.

- a) Montrer que S^n est une similitude directe et préciser ses éléments caractéristiques.
- b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles S^n est une homothétie de rapport négatif.
- c) Caractériser l'application $\varphi = S_{(OB)} \circ S^8$ où $S_{(OB)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OB).

EXERCICE4 : (4pts)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1) Etudier les variations de f sur $]0; +\infty[$.

2) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 8, on pose : $u_n = \sum_{k=8}^n f(k)$.

a) Soit k un entier supérieur ou égal à 8. Montrer que $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$.

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 8$, $u_{n+1} - f(8) \leq \int_8^{n+1} f(t)dt \leq u_n$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_8^{n+1} f(t)dt$.

d) En déduire que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

3) Pour tout entier $n \geq 8$, on pose $v_n = u_n - \int_8^{n+1} f(t)dt$.

a) Etudier la monotonie de la suite (u_n) puis déduire que $u_n - f(8) \leq \int_8^{n+1} f(t)dt \leq u_n$ et que (v_n) est bornée.

b) En utilisant 1)a), montrer que la suite (v_n) est croissante.

c) Prouver que (v_n) est convergente et montrer que sa limite l vérifie $0 \leq l \leq 0,74$.

EXERCICE5 : (5pts)

Soit f_n la fonction définie sur $]-1; +\infty[$: $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par ζ_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1)a) Dresser le tableau de variation de f_n .

b) Montrer que pour tout $x > -1$, $f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$.

2) Etudier les positions relatives des courbes ζ_1 et ζ_2 puis construire ζ_1 et ζ_2 .

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\frac{1}{n-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n I_{n+1} = 1 + I_n - \frac{e}{2^n}$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$.

4) Pour tout réel $x \geq 1$, on pose $F(x) = \int_0^{2\ln x} f_1(t) dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[1; +\infty[$ et calculer $F'(x)$ puis déduire que $F(x) = \int_1^x \frac{2t}{1+2\ln t} dt$.

b) Montrer que $\forall x \geq 2$, $F(x) \geq \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{2t}{1+2\ln t} dt$.

5) a) Montrer que $\forall x \geq 2$, il existe un réel $c \in \left[\frac{x}{2}; x\right]$ tel que $F(x) \geq \frac{cx}{1+2\ln c}$.

b) En déduire que $\forall x \geq 2$, $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{x}{2(1+2\ln x)}$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

c) Dresser le tableau de variations.

d) Montrer que la courbe Γ de F admet un point d'inflexion d'abscisse \sqrt{e} .

e) Tracer l'allure de Γ . On donne $F(\sqrt{e}) \approx 1,2$.



BON TRAVAIL