Lycée El aghaliba Mars 2009	Devoir de synthèse N° 2 Mathématiques	Prof: Otay Classe: 4^{eme} Maths Durée :4 heures

Exercice N° 1: (2points)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte.
Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1) *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I et a et b deux réel de I on à:*

a) $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ b) $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \geq 0$ c) $\int_a^b |f(t)|dt \geq 0$

2) *La limite de* $\frac{\ln(1-t)}{t}$ *en zéro est égale à :*

a) 1 b) -1 c) 2

3) *La parabole d'équation* $x^2 = 4y$ *à pour foyer le point de coordonnées :*

a) F (0,-1) b) F(0,1) c) F(1,0)

4) *L'intégrale* $\int_1^x \ln t\, dt$ *pour tout* $x \in]0,+\infty[$ *est égal à :*

a) $x \ln x - x + 1$ b) $x \ln x$ c) $x \ln x - x$

Exercice N° 2: (3points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé on désigne par (H) l'ensemble des points M(x, y) tels que: $12x^2 - 4y^2 = 48$.

1) a- *Montrer que (H) est une hyperbole de foyer F(4,0).*

b- *Déterminer les asymptotes de (H) puis tracer (H).*

2) *Soit* $M(x_0,y_0)$ *un point de (H) non situé sur l'axe focal .La tangente (T) à (H) en M coupe la droite D d'équation x = 1 en un point Q.*

a- *Calculer le produit scalaire* $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FQ}$.

b- *En déduire une construction géométrique de la tangente à (H) en un point M de (H).*

Exercice N° 3: (5points)

Soit OAB un triangle rectangle isocèle en O tels que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ *et OA = OB = 2 cm*

On pose $I = O * A$, $J = O * B$ *et* $K = A * B$.

On désigne par S la similitude directe tel que S(A) = K et S(K) = J.

***A** / 1) Déterminer le rapport et l'angle de S .*

2) Montrer que O est le centre de S.

***B** / On considère le repère orthonormé* $R=(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

1) Déterminer l'application complexe associée a S.

2) Soit P l'ensemble des points M(x,y) vérifiant: $x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y = 0$ *selon R.*

a- Soit M'(x',y') tel que M' = S (M) . Montrer que $\begin{cases} x=(x'+y') \\ y=(y'-x') \end{cases}$.

b- Donner une équation de P' l'image de P par S.

c- Montrer que P' est une parabole dont on précisera le foyer F' et la directrice D'.

d- En déduire que P est une parabole dont on pressera le foyer et la directrice.

Exercice N°4 : (5points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1) a- Dresser le tableau de variation de la fonction f

b- Montrer que la droite D d'équation x = 1 est un axe de symétrie pour (C).

c- Préciser la branche infinie de (C) au voisinage de + oo.

d- Tracer la courbe (C).

2) Soit F la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *Par* $F(x)=\int_1^{1+\tan x}\frac{dt}{t^2-2t+2}$

a- Montrer que F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *et que F'(x) = 1.*

b- En déduire que F(x) = x et que $\int_1^2\frac{dt}{t^2-2t+2}=\frac{\pi}{4}$

3) a-Montrer que $\int_1^2 f(x)dx = 2\ln 2 - 2\int_1^2\frac{x^2-x}{x^2-2x+2}dx$

b- Vérifier que pour tout $x\in IR$, $\frac{x^2-x}{x^2-2x+2}=1+\frac{x-1}{x^2-2x+2}-\frac{1}{x^2-2x+2}$

c-Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites *d'équations x=1 et x= 2*

Exercice N°5 : (5points)

On définie pour tout entier naturel non nul n l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$

1) Montrer que la suite (I_n) *est décroissante .Déduire qu'elle est convergente*

2) Montrer que $\forall n \in IN^*; \frac{1}{4(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ *En déduire* $\lim_{n\to\infty} I_n$.

3) a) Montrer que $\forall n \in IN^*; I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^3} dx$

b) Déduire que $\forall n \in IN^*\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4(n+2)} \leq (n+1) I_n \leq \frac{1}{4} + \frac{2}{n+2}$

c) Calculer $\lim_{n\to\infty} (n+1) I_n$ *En déduire* $\lim_{n\to\infty} nI_n$

4) Pour tout entier naturel non nul on pose $S_n = \sum_{K=1}^{n} (-1)^k I_K$ *et* $I = \int_0^1 \frac{-x}{(x+1)^3} dx$ *:*

a- Montrer que $I = -\frac{1}{8}$

b- Vérifier que $\forall n \in IN^*$ *et* $\forall x \in [0,1]: \sum_{K=1}^{n} (-1)^K x^K = \frac{-x}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$

c- En déduire que $S_n - I = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} dx$.

d- Montrer que $|S_n - I| \leq I_{n+1}$ *, En déduire que* (S_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

………………………………….   ……………………….   ……………………………………

Correction du devoir de synthèse N° 2

Exercice N° 1:

1) b 2) b 3) b 4) a

Exercice N° 2:

1) a- $\frac{12x^2}{48}-\frac{4y^2}{48}=1$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ *donc* $a = 2$; $b= 2\sqrt{3}$ *et* $c= 4$

(H) est une hyperbole de foyer F(4,0) et de directrice D: x = 1

b- $D_1 : y = \sqrt{3}x$ *et* $D_2 : y = -\sqrt{3}x$

2) a- $Q\ (1,y_Q)$

$Q \in T_{M_0} : \frac{xx_0}{4}-\frac{yy_0}{12}=1$ *on conclu que* $y_Q=\frac{3x_0}{y_0}-\frac{12}{y_0}$

$\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix} x_0-4 \\ y_0 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{FQ}\begin{pmatrix} 1-4 \\ \frac{3x_0}{y_0}-\frac{12}{y_0} \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{FM}\,\overrightarrow{FQ}=(x_0-4)(-3)+y_0(\frac{3x_0}{y_0}\frac{12}{y_0})=....=0$

b- $\overrightarrow{FM}\,\overrightarrow{FQ}=0$ *donne* $\overrightarrow{FM}\perp\overrightarrow{FQ}$

on trace la perpendiculaire à (FM) passant par M.

Exercice N° 3:

A- 1) $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\theta\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

B) 1) S(M) = M'

$Z' = a\,Z + b$ or S(O) = O donc b= 0 d' ou Z' = a Z = $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}Z$

$Z'=(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})Z$

2) a- $Z = x + iy$ *et* $Z' = x' + iy'$

$x'+iy'=(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})(x+iy)=..........$

b- on obtient $x= x' +y'$ *et* $y= y' - x'$

c- $P' : y'^2= 2x'$ *donc P' est une parabole de foyer* $(F'(\frac{1}{2},0)$ *et de directrice* $D': x'=\frac{-1}{2}$

d- $P' = S(P)$ *donc* $P = S^{-1}(P)$, S^{-1}*est une similitude directe de centre O , de rapport* $\sqrt{2}$ *et d'angle* $-\frac{\pi}{4}$

Soit M un point du plan et K son projeté orthogonal sur D' on note $N = S^{-1}(M)$ *,*
$H = S^{-1}(K)$ *et* $F = S^{-1}(F')$

$M \in P'$ *signifie que* $\frac{MF'}{MK}=1$

Signifie que $\frac{\sqrt{2}\,NF}{\sqrt{2}NH}=1$

Signifie que $\frac{NF}{NH}=1$

Comme (MK) $\perp$ *D' en K alors (NH)* $\perp$ S^{-1}*(D') en H*

On pose D = S^{-1}*(D')*

$\frac{NF}{NH}=1$ *donc P est une parabole de foyer F et de directrice D avec F =* S^{-1}*(F')*

$x_F = x'_{F'} + y_{F'} = \frac{1}{2}$ *et* $y_F = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

d'où $F(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ *et D : x – y = -1*

Exercice N° 4:

1) *f est définie ssi* $x^2-2x+2 \succ 0$

or $x^2-2x+2=0$

$\Delta=-4 \prec 0$ *sig* $x^2-2x+2 \succ 0$

Df =IR

$f'(x)=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}$

b-

c- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ *donc* c_f *admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses*

2) b- F'(x) =1 sig que F(x) = x + c or F(0) = 0 donc F(x) = x

$$\int_1^2 \frac{dt}{t^2-2t+2}=F(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$$

2) a- $\int_1^2 f(x)dx$

$u(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ $\quad$ $u'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$

$v'(x) = 1$ $\quad$ $v(x) = x$

$\int_1^2 f(x)dx$ = …………….=…..

b-Réduire au même dénominateur

c- $A=\int_1^2 \left|\ln(x^2-2x+2\right|dx$

$= \int_1^2 \ln(x^2 - 2x + 2)dx$

$= 2\ln 2 - 2\int_1^2 \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2}dx$

$= 2\ln 2 - 2\int_1^2 1 + \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 2}dx$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= (\ln 2 + \frac{\pi}{4})$ *ua*

Exercice N° 5:

1) $I_{n+1} - I_n = \ldots\ldots \leq 0$ *or* I_n *est minoré par 0 d'où le résultat*

2) $0 \leq x \leq 1$ *sig* $1 \leq x+1 \leq 2$ *sig* $1 \leq (x+1)^2 \leq 4$ *sig ………………*

3) a- $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx$ *une intégration par partie avec*

$u(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad u'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}$

$v'(x) = x^n$ $\qquad v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

nous donne le résultat

b- de même que la question n°2

c- $\lim_{n \to +\infty} (n+1)I_n = \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{4}$

$\lim_{n \to +\infty} nI_n + I_n = \frac{1}{4}$ *or* $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$ *donc* $\lim_{n \to +\infty} nI_n = \frac{1}{4}$

4)a- $I = \int_0^1 \frac{-x}{(X+1)^3}dx$ *une intégration par partie avec*

$u(x) = x$ $\qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = \frac{-1}{(x+1)^3}$ $\qquad v(x) = \frac{1}{2(x+1)^2}$

nous donne $I = \frac{-1}{8}$

b- $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k = (-x)\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}$ *,somme des termes consécutif d'une suite géométrique de raison (-x) et de premier terme (-x).*

$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k = \frac{-x}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$

c- $S_n - I = \ldots\ldots = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}dx$

d- $\left|S_n - I\right| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}dx$ *or* $(1+x)^2 \leq (1+x)^3$ *donc* $\frac{1}{(1+x)^3} \leq \frac{1}{(1+x)^2}$

sig $\frac{x^{n+1}}{(1+x)^3} \leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}$ *sig* $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}dx$

d'où le résultat

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = I = \frac{-1}{8}$$