PROF : Mr Mighri. A Durée : 4H	**Devoir De Synthèse N°2**	**L. IBN RACHIK**	
		4M1-4	**Le 03-03-2009**

EXERCICE N°1 (3 points)

QCM : Indiquer pour chaque question la réponse exacte . Aucune justification n'est demandée

1) La limite de $(x^2 - e^x + 1)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale :

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0

2) Soit $C = \left\{M(x,y) \text{ tels que } y = \sqrt{\text{Ln}x}\ ;\ 1 \le x \le e^2\right\}$

Soit S le solide de révolution obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox) . Le volume du solide S est égal :

a) πe^2 b) e^2 c) $\pi(1+e^2)$

3) Soit l'intégrale $I = \int_0^{\text{Ln}2} \frac{e^x}{e^x + 1}dx$. Alors on a :

a) $I = \text{Ln}(e+1)$ b) $I = \text{Ln}3 - \text{Ln}2$ c) $I = \text{Ln}2$

4) Soit n un entier non nul tel que $(5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7) = 35$. Alors on a :

a) $n \equiv 0 \pmod 7$ b) $n \equiv 0 \pmod 3$ c) $n \equiv 0 \pmod 5$

VRAI – FAUX : Répondre Vrai ou Faux en justifiant la réponse :

1) L'application $f : P \to P$, $M(Z) \to M'(Z')$ tel que $Z' = (1+i)Z + 3 + i$ est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe $(1+i)$

2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^5 x}{3 + \cos x}dx = \pi$

3) Soient a et b deux entiers tels que $a \wedge b = 1$

L'équation $ax + b^2y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

EXERCICE N°2 (4points)

1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $8x + 5y = 1$

Résoudre l'équation (E)

2) Soit N un entier vérifiant le système (S) $\begin{cases} N \equiv 1 \pmod 8 \\ N \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$

a) Montrer que N est une solution du système (S) si et seulement si $N \equiv 17 \pmod{40}$

b) Vérifier que 9417 est une solution du système (S)

c) En déduire que l'entier $(9417)^{2012} - 1$ est divisible par 40

3) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E') : $8x + 25y = 1$

a) Vérifier que le couple $(-3,1)$ est une solution particulière de (E') et résoudre l'équation (E')

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (F): $8x + 25y = 5$

c) Soit $d = x \wedge y$ où (x,y) est une solution de l'équation (F)

Donner les valeurs possibles de d

d) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (F) sachant que $d = 5$

EXERCICE N°3 (4points)

Le plan est orienté dans le sens direct

Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$. On note $J = A * D$

La perpendiculaire en D à la droite (BD) coupe la droite (OJ) en un point E

1) Soit S la similitude directe qui envoie A sur J et B sur D

a) Déterminer le rapport et l'angle de S

b) Déterminer les images des droites (BD) et (AD) par la similitude S . En déduire S(D)

2) On désigne par (ζ) et (ζ') les cercles de diamètres respectifs $[AJ]$ et $[BD]$

a) Soit Ω le centre de S . Montrer que $\Omega \in \zeta \cap \zeta'$ puis construire le point Ω

b) Montrer que les points Ω, B et E sont alignés

3) On pose $\rho = S^{-1} o S_{(BE)}$

Montrer que ρ est une similitude indirecte dont on précisera le centre , le rapport et l'axe

4) Soit $R = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ un repère orthonormé direct du plan

Soit l'application $g : P \longrightarrow P$

$M(Z) \longrightarrow M'(Z')$ tel que $Z' = 2i\overline{Z} - 1 - i$

a) Montrer que g est une similitude indirecte et donner son rapport et son centre

b) Donner une équation cartésienne de l'axe de g

<u>EXERCICE N°4</u> (4 points)

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x + x(Lnx)^2 & \text{si } x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 4cm)

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu

c) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a $f'(x) = (1+Lnx)^2$

d) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse 1

b) Etudier la position relative de (C) et T

c) Construire (C) et T

3) Soit la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ définie par $I_n = \int_1^e x(Lnx)^n\,dx$

a) Calculer I_1

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$, $x = e$ et $y = 0$

Calculer A (en cm^2)

<u>EXERCICE N°5</u> (5 points)

Soit F_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F_n(x) = \int_0^{Ln(1+x)} t\,e^t(e^t - 1)^n\,dt$ où n est un entier naturel non nul

1)a) Montrer que F_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $F_n'(x) = x^n\,Ln(1+x)$

b) En déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a $F_n(x) = \int_0^x t^n\,Ln(1+t)\,dt$

2) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = F_n(1)$

a) Vérifier que pour tout $x \in [0,1]$ on a : $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$. En déduire la valeur de u_1

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq u_n \leq \frac{Ln2}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots\cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}$

On pose pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = 1 - x + x^2 - \cdots\cdots\cdots + (-1)^n x^n$,

a) Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{x+1}$ et que $v_n = \mathrm{Ln}2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

b) Vérifier que pour tout $x \in [0,1]$ on a : $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$. En déduire que $\left| v_n - \mathrm{Ln}2 \right| \leq \frac{1}{n+2}$

4) a) Montrer , en intégrant par parties , que $u_n = \frac{\mathrm{Ln}2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} (\mathrm{Ln}2 - v_n)$

b) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim_{n \to +\infty} (n+1) u_n$

Correction du devoir de Synthèse N°2

EXERCICE N°1 :

QCM : $(4\times 0,5)$ 1) a) 2) c) 3) b) 4) a)

VRAI – **FAUX** : $(0,5+0,25+0,25)$

1) **FAUX :** f est une similitude directe de rapport $k=\left|1+i\right|=\sqrt{2}$,d'angle $\theta\equiv\arg(1+i)(2\pi)\equiv\frac{\pi}{4}(2\pi)$ et de centre Ω d'affixe $Z_{\Omega}=\frac{3+i}{1-(1+i)}=3i-1$

2) FAUX : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5 x}{3+\cos x}dx=0$ car la fonction $x\mapsto\frac{\sin^5 x}{3+\cos x}$ est impaire

3) VRAI : $a\wedge b^2=1$

EXERCICE N°2 (0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,75 + 0,5 + 0,25 + 0,5)

1) On a le couple $(2,-3)$ est une solution particulière de (E) et on a : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(2+5k,-3-8k),k\in\mathbb{Z}\}$

2)a) $\begin{cases}N\equiv 1(\text{mod}\,8)\\ N\equiv 2(\text{mod}\,5)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}N\equiv 17(\text{mod}\,8)\\ N\equiv 17(\text{mod}\,5)\end{cases}\Leftrightarrow N\equiv 17(\text{mod}\,8\times 5)\Leftrightarrow N\equiv 17(\text{mod}\,40)$ car $8\wedge 5=1$

b) $9417=8\times 1177+1$ et $9417=5\times 1883+2$ donc $\begin{cases}9417\equiv 1(\text{mod}\,8)\\ 9417\equiv 2(\text{mod}\,5)\end{cases}$

c) On a $\begin{cases}9417\equiv 1(\text{mod}\,8)\\ 9417\equiv 2(\text{mod}\,5)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(9417)^{2012}\equiv 1(\text{mod}\,8)\\ (9417)^{20112}\equiv 2^{2012}(\text{mod}\,5)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(9417)^{2012}\equiv 1(\text{mod}\,8)\\ (9417)^{2012}\equiv(2^4)^{503}(\text{mod}\,5)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}(9417)^{2012}\equiv 1(\text{mod}\,8)\\ (9417)^{2012}\equiv 1(\text{mod}\,5)\end{cases}\Rightarrow(9417)^{2012}\equiv 1(\text{mod}\,40)$ car $8\wedge 5=1\Rightarrow 9417^{2012}-1\equiv 0(\text{mod}\,40)$

3)a) On a $8\times(-3)+25\times 1=1$ et $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(-3+25k,1-8k),K\in\mathbb{Z}\}$

b) On a $8\times(-15)+25\times 5=5$ donc le couple $(-15,5)$ est une solution particulière de (F) et on a :
$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(-15+25k,5-8K),k\in\mathbb{Z}\}$

c) On a d divise x et y donc divise $8x+25y$ car (x,y) est une solution de (E) donc d divise 5 donc $d\in\{1,5\}$

d) On a : $x\wedge y=5$ donc il existe un couple (x',y') d'entiers tels que $\begin{cases}x=5x'\\ y=5y'\end{cases}$ avec $x'\wedge y'=1$

donc l'équation devient $40x'+125y'=5\Leftrightarrow 8x'+25y'=1\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-3+25k\\ y'=1-8k\end{cases}$, $k\in\mathbb{Z}$ d'aprés a)

et par la suite $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(-15+125k,5-40k),k\in\mathbb{Z}\}$

EXERCICE N°3 (0,5 + 0,75 + 0,75 + 0,25 + 0,75 + 0,5 + 0,5)

1)a) Soit k le rapport de S et θ son angle donc $k=\frac{JD}{AB}=\frac{1}{2}$ et $\theta\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$

b) $S((BD))=(ED)$ et $S((AD))=(OJ)$

On a $D=(BD)\cap(AD)\Rightarrow S(D)=S((BD))\cap S((AD))=(ED)\cap(OJ)\Rightarrow S(D)=E$

2)a) $S(A)=J\Rightarrow(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega J})\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\Rightarrow\Omega\in\zeta$ et $S(B)=D\Rightarrow(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega D})\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)\Rightarrow\Omega\in\zeta'$ donc $\Omega\in\zeta\cap\zeta'$

et comme $\zeta\cap\zeta'=\{A,w\}$ et comme $S(A)=J\neq A$ donc $\Omega=W$

b) On a $SoS(B)=E\Leftrightarrow S^{+}_{(\Omega,\frac{1}{4},\pi)}(B)=E\Leftrightarrow h_{(\Omega,\frac{1}{4})}(B)=E$ donc Ω, B et E sont alignés

3) ρ est une similitude indirecte de rapport 2 car c'est la composée d'une similitude directe de rapport 2 et d'un antidéplacement

• $\rho(\Omega)=\Omega$ donc Ω est le centre de ρ

• $\rho(E) = S^{-1} o S_{(BE)}(E) = S^{-1}(E) = D$ donc l'axe de ρ est la droite qui porte la bissectrice intérieure de $\widehat{E\Omega D}$

4)a) On a $Z' = a\overline{Z} + b$ avec $a = 2i$ et $b = -1-i$ donc g est une similitude indirecte de rapport $|a| = 2$ et de

centre I d'affixe $Z_I = \dfrac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2} = 1+i = Z_C$

b) Soit Δ l'axe de ρ donc $\Delta = \left\{M(Z) \in P \text{ tel que } \overrightarrow{CM'} = 2\overrightarrow{CM} \text{ et } g(M) = M'\right\}$

$\overrightarrow{CM'} = 2\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow h_{(C,2)}(M) = M' \Leftrightarrow Z' = 2Z - 1 - i$ et comme $g(M) = M'$ alors $Z' = 2i\overline{Z} - 1 - i$ donc on a :

$2i\overline{Z} - 1 - i = 2Z - 1 - i \Leftrightarrow i\overline{Z} = Z \Leftrightarrow i(x - iy) = x + iy$ avec $Z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow y = x$

donc Δ est la droite d'équation cartésienne $y = x$ qui est la droite (AC)

EXERCICE N°4 (0,25 + 0,5 + 0,25 + 0,5 + 0,25 + 0,25 + 0,75 + 0,25 + 0,5 + 0,5)

1)a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x + x(\mathrm{Ln}x)^2 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + (\mathrm{Ln}x)^2 = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0

La courbe (C) admet à droite au point O une demi – tangente verticale dirigée vers le haut

c) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ car le produit et la somme de fonctions dérivables et pour tout $x \succ 0$ on a :

$f'(x) = 1 + (\mathrm{Ln}x)^2 + 2\,\mathrm{Ln}x = (1+\mathrm{Ln}x)^2$

d) On a $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \succ 0$ et f' s'annule en $\dfrac{1}{e}$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	+	
f	0	↗	$2e^{-1}$	↗	$+\infty$

2)a) $T : y = x$

b) • Pour $x \in]0,+\infty[$ On a $f(x) - x = x(\mathrm{Ln}x)^2 \geq 0$

donc (C) est située au dessus de T

• Pour $x = 0$ On a $(C) \cap T = \{O\}$

c) **<u>Construction de (C) et T</u> :**

* **<u>Branche infinie</u> :**

On a $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

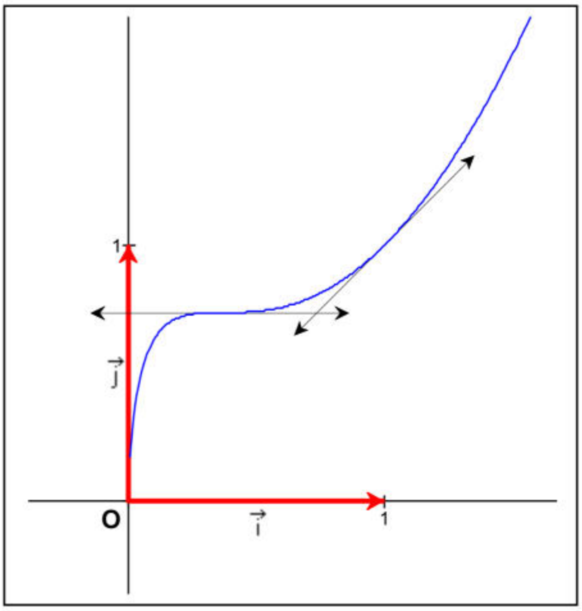
et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} 1 + (\mathrm{Ln}x)^2 = +\infty$

donc (C) admet une branche parabolique

de direction $(O, \vec{j})$ au $v(+\infty)$

* **<u>Tableau de valeurs</u>**

x	0	e^{-1}	1	2
f(x)	0	$2e^{-1}$	1	2



3)a) $I_1=\int_1^e x\,\mathrm{Ln}x\,dx$

On pose $\begin{cases} u(x)=\mathrm{Ln}x \\ v'(x)=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v(x)=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

donc $I_1=\left[\dfrac{x^2}{2}\mathrm{Ln}x\right]_1^e-\dfrac{1}{2}\int_1^e x\,dx=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_1^e=\dfrac{e^2+1}{4}$

b) $\begin{cases} u(x)=(\mathrm{Ln}x)^{n+1} \\ v'(x)=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=\dfrac{n+1}{x}(\mathrm{Ln}x)^n \\ v(x)=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

donc $I_{n+1}=\left[\dfrac{x^2}{2}(\mathrm{Ln}x)^{n+1}\right]_1^e-\dfrac{n+1}{2}\int_1^e x(\mathrm{Ln}x)^n\,dx=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}I_n$

$A=\int_1^e |f(x)|\,dx=\int_1^e f(x)\,dx$ car $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[1,e]$

$=\int_1^e\left(x+x(\mathrm{Ln}x)^2\right)dx=\int_1^e x\,dx+\int_1^e x(\mathrm{Ln}x)^2dx=\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_1^e+I_2=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^2}{2}-I_1$

$=e^2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{e^2+1}{4}\quad=\dfrac{3e^2-3}{4}\,u.a=12(e^2-1)\,cm^2$

<u>EXERCICE N°5</u> (0,5 + 0,25 + 0,75 + 0 ,75 + 1 + 0,75 + 0,5 + 0,5)

1)a) On pose $f_n(t)=te^t(e^t-1)^n$, $t\in\mathbb{R}$

$\begin{cases} \bullet f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \bullet \text{La fonction } x\mapsto \mathrm{Ln}(1+x) \text{ est continue sur } [0,+\infty[\\ \bullet \mathrm{Ln}(1+x)\in\mathbb{R} \text{ pour tout } x\in[0,+\infty[\\ \bullet 0\in\mathbb{R} \end{cases}$ donc $\begin{cases} F_n \text{ est dérivable sur } [0,+\infty[\text{ et on a} \\ F_n'(x)=\left(\mathrm{Ln}(1+x)\right)' f_n\left(\mathrm{Ln}(1+x)\right) \\ =\dfrac{1}{1+x}.(1+x)\,x^n\,\mathrm{Ln}(1+x)=x^n\mathrm{Ln}(1+x) \end{cases}$

b) On a $F_n'(t)=t^n\mathrm{Ln}(1+t)\Rightarrow\int_0^x F_n'(t)dt=\int_0^x t^n\mathrm{Ln}(1+t)\,dt\Rightarrow F_n(x)-F_n(0)=\int_0^x t^n\mathrm{Ln}(1+t)\,dt$

donc $F_n(x)=\int_0^x t^n\,\mathrm{Ln}(1+t)dt$

2) a) $x-1+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{x^2}{x+1}$

$u_1=\int_0^1 t\,\mathrm{Ln}(1+t)\,dt=\left[\dfrac{t^2}{2}\mathrm{Ln}(1+t)\right]_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{t^2}{1+t}dt=\dfrac{\mathrm{Ln}2}{2}-\dfrac{1}{2}\int_0^1(t-1+\dfrac{1}{1+t})\,dt$

$=\dfrac{\mathrm{Ln}2}{2}-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{t^2}{2}-t+\mathrm{Ln}(1+t)\right]_0^1$ donc $u_1=\dfrac{1}{4}$

b) pour tout $t\in[0,1]$ on a $0\leq\mathrm{Ln}(1+t)\leq\mathrm{Ln}2\Rightarrow 0\leq t^n\mathrm{Ln}(1+t)\leq t^n\mathrm{Ln}2\Rightarrow 0\leq u_n\leq(\mathrm{Ln}2)\int_0^1 t^n dt$

donc $0\leq u_n\leq\dfrac{\mathrm{Ln}2}{n+1}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathrm{Ln}2}{n+1}=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

3)a) $S_n(x)$ est la somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $(-x)\neq 1$

donc $S_n(x) = 1\dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} = \dfrac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} = \dfrac{1}{1+x} + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{1+x}$

La fonction S_n est continue sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 S_n(x)dx = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x}dx + (-1)^n \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx$

Or $\int_0^1 S_n(x)dx = \int_0^1 1dx - \int_0^1 xdx + \int_0^1 x^2dx - \cdots\cdots + (-1)^n \int_0^1 x^n dx = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots\cdots + \dfrac{(-1)^n}{n+1} = v_n$

et $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x}dx = \left[Ln(1+x)\right]_0^1 = Ln2$

b) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+x \leq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$

on a $\left| v_n - Ln2 \right| = \left| \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx \right|$ car $\left|(-1)^n\right| = 1$ or $0 \leq \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \int_0^1 x^{n+1}dx$

donc $0 \leq \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \dfrac{1}{n+2}$ donc $\left| v_n - Ln2 \right| \leq \dfrac{1}{n+2}$

4)a) On pose $\begin{cases} u(t) = Ln(1+t) \\ v'(t) = t^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{1+t} \\ v(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \end{cases}$ donc $u_n = \left[\dfrac{t^{n+1}Ln(1+t)}{n+1}\right]_0^2 - \dfrac{1}{n+1}\int_0^1 \dfrac{t^{n+1}}{t+1}dt$

donc $u_n = \dfrac{Ln2}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\left[\dfrac{v_n - Ln2}{(-1)^n}\right] = \dfrac{Ln2}{n+1} + \dfrac{(-1)^n}{n+1}(Ln2 - v_n)$ car $\dfrac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$

b) On a $\left| v_n - Ln2 \right| \leq \dfrac{1}{n+2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = Ln2$

On a $(n+1)u_n - Ln2 = (-1)^n(Ln2 - v_n) \Rightarrow \left|(n+1)u_n - Ln2\right| = \left| Ln2 - v_n \right|$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(Ln2 - v_n) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(n+1)u_n - Ln2\right] = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)u_n = Ln2$