

Exercice n°1

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, de coté a, D , E , F les points des segments [AB], [BC], [CA] tels que : $AD = BE = CF = \frac{a}{3}$

1) a) Montrer que $DF = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

b) Montrer que DEF est équilatéral de sens direct

2) Soit G le centre de gravité de ABC ($\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$)

Montrer que $\vec{GD} + \vec{GE} + \vec{GF} = \vec{0}$. En déduire que G est le centre du cercle circonscrit au triangle DEF

3) Montrer que s'il existe une similitude directe qui transforme ABC en DEF, alors son centre est G

4) Soit R la rotation de centre G telle que R(A) = B

Montrer que R laisse globalement invariant les triangles ABC et DEF

5) On pose $k = \frac{GD}{GA}$ et $(\vec{GA}, \vec{GD}) \equiv \theta(2\pi)$

a) Montrer que $GE = kGB$, $GF = kGC$, $(\vec{GB}, \vec{GE}) \equiv \theta(2\pi)$, $(\vec{GC}, \vec{GF}) \equiv \theta(2\pi)$

b) En déduire que DEF est l'image de ABC par une similitude directe s de centre G

Déterminer k et θ , caractériser s

6) On pose $\sigma = s \circ S_{(GA)}$.

a) Déterminer $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$. Montrer que σ est une similitude indirecte, préciser son rapport

b) Déterminer la droite Δ telle que : $r_{(G,\theta)} = S_{\Delta} \circ S_{(GA)}$.

c) Caractériser σ et déterminer $\sigma(C)$.

Exercice n°2

On considère la fonction F de IR vers IR définie par $F(x) = \int_0^x \frac{3dt}{5 + 2(e^t + e^{-t})}$

1) a) Montrer que F est définie sur IR et calculer F(0)

b) Montrer que F est dérivable sur IR et calculer F'(x)

c) Montrer que F est impaire

2) Soit φ la fonction définie sur IR par $\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

a) Démontrer que : $\varphi \langle \text{IR} \rangle =] - 1 ; 1 [$

b) En déduire l'existence de la fonction G définie par $G(x) = \int_0^{\varphi(x)} \frac{6dt}{9 - t^2}$

c) Montrer que G est dérivable sur IR et que $G'(x) = F'(x)$; $\forall x \in \text{IR}$.

d) En déduire $G(x) = F(x)$; $\forall x \in \text{IR}$

3) a) Vérifier que ; $\forall t \in \text{IR} - \{-3 ; 3\}$ on a : $\frac{6}{9-t^2} = \frac{1}{3-t} + \frac{1}{3+t}$. En déduire l'expression de G(x)

b) Quelle est la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$? Dresser le tableau des variations de la fonction F et construire sa courbe représentative

Problème

1) Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{x} - \text{Log}(\frac{x+1}{x})$

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère ON

2) Soit g la fonction numérique à variable réelle définie par : $g(x) = \frac{1}{x+1} - \text{Log}(\frac{x+1}{x})$

Montrer que sa courbe représentative (C') et la courbe (C) de f sont symétriques par rapport au point $\Omega(-\frac{1}{2}, 0)$. Construire (C')

3) Soit k un réel strictement positif, calculer $\int_1^k \text{Log}(\frac{x+1}{x}) dx$. Donner l'expression de $\int_1^k f(x) dx$

II) 1) Soit m un réel strictement positif

a) Montrer que l'on a : $\frac{1}{m+1} \leq \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{m}$, en déduire que : $\frac{1}{m+1} \leq \text{Log}(\frac{m+1}{m}) \leq \frac{1}{m}$

b) Montrer que : $0 \leq f(m) \leq \frac{1}{m(m+1)}$

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^* - \{1\}$, on pose $\alpha_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$; $\beta_n = \text{Log} n$; $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$

a) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ on a : $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\gamma_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)$

3) On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^* - \{1\}$ par :

$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \text{Log} n$ et $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \text{Log} n$

a) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante

b) Montrer que ; $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ on a : $0 \leq u_n \leq v_n \leq 1$

c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l qui appartient à $]0 ; 1[$

III) 1) a) Pour tout n de \mathbb{N}^* on pose $S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}$

En utilisant : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$; simplifier l'expression de S_n . Montrer que la suite (S_n) est

convergente et calculer sa limite

b) Montrer que : $0 \leq f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \dots + f(2n) \leq S_n$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \dots + f(2n)]$

2) On définit la suite (w_n) sur \mathbb{N}^* par : $w_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$

Vérifier que : $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \dots + f(2n) = w_n - \text{Log} 2 - \text{Log} [1 + \frac{1}{2n}]$

Déduire que la suite (w_n) est convergente et donner sa limite

3) Pour tout n de \mathbb{N}^* on pose $a_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n})$

a) Calculer : $I_1 = \int_0^1 (1-t) dt$ et $I_k = \int_0^1 (t^{2k-2} - t^{2k-1}) dt$, $\forall k \geq 2$.

En déduire que : $a_n = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = \int_0^1 (\frac{1-t^{2n}}{1+t}) dt$

b) Montrer que : $|a_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t}| \leq \frac{1}{2n+1}$. En déduire que (a_n) est convergente et donner sa limite

c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $a_n = w_n - \frac{1}{n}$

Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t}$ et retrouver la limite de la suite (w_n)