

<i>Lycée Houmet Souk</i>	<i>Devoir de Contrôle N : 2</i>	<i>4 Mathématique 1</i>
<i>Prof: Loukil Mohamed</i>	<i>Durée : 2 Heures</i>	<i>19 - 02 - 2019</i>

**EXERCICE N : 1 ( 4.5 points )**

Soit  $f : P \rightarrow P$  ;  $M(z) \mapsto M'(z')$  avec :  $z' = \frac{1-i}{2} z - 2 + 2i$  .

1) a) Montrer que  $f$  est une similitude directe dont on précisera le centre  $\Omega$  , le rapport et l'angle .

b) On pose  $M(x, y)$  et  $M'(x', y')$  . Exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $x'$  et  $y'$  .

2) On donne la courbe  $(\Gamma)$  d'équation :  $x^2 y - 2x - 3y - 1 = 0$  et  $f(\Gamma) = \Gamma'$  .

a) Montrer que  $(\Gamma')$  a pour équation :  $x'^2 - y'^2 - x' + 3y' - 9 = 0$

b) Prouver que  $(\Gamma')$  est une hyperbole et donner son centre , ses foyers et ses directrices .

c) En déduire la nature de  $(\Gamma)$  et ses caractéristiques .

**EXERCICE N : 2 ( 7 points )**

Dans un plan orienté ,on considère le losange  $ABDC$  de centre  $O$  tel que  $(\overline{AB}, \overline{AC}) = 2\alpha$  ( $2\pi$ )

où  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $BC = 2$  unités . ( Pour le traçage de la figure on prend  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  )

On désigne par  $K$  et  $J$  les projetés orthogonaux respectifs de  $O$  et  $D$  sur  $(AC)$  et par  $E = S_K(O)$  .

A) 1) Soit  $S$  la similitude directe qui transforme  $B$  en  $O$  et  $C$  en  $E$  .

a) Montrer que  $S$  a pour angle  $\alpha$  et pour rapport  $\cos \alpha$  .

b) Prouver que  $A$  est le centre de  $S$  .

2) Soit  $\sigma$  la similitude indirecte telle que  $\sigma(B) = O$  et  $\sigma(C) = E$  .

a) Prouver que  $\sigma$  admet un centre qu'on note  $\Omega$  .

b) Montrer que  $\sigma(O) = K$  puis déduire que  $\overline{OK} = \cos^2 \alpha \overline{OB}$  .

c) Montrer que  $\frac{JK}{BD} = \cos^2 \alpha$  puis déduire que  $\sigma \circ \sigma(D) = J$  .

d) Construire  $\Omega$  et l'axe  $\Delta$  de  $\sigma$  .

B) Dans cette partie on munit le plan du repère orthonormé direct  $R(O, \overline{OC}, \overline{OB})$  .

1) Prouver que :  $Z_K = \cos^2 \alpha + i \cos \alpha \sin \alpha$  .

2) Montrer que :  $Z_\Omega = 2 \cotan^2 \alpha + i \cotan \alpha$  .

3) On suppose que  $B$  et  $C$  sont fixes , prouver alors que lorsque  $\alpha$  décrit  $]0, \frac{\pi}{2}[$  le point  $\Omega$

varie sur une parabole fixe  $(\mathcal{P})$  dont on précisera le sommet , le foyer  $F$  et la directrice  $(\mathcal{D})$  .

**EXERCICE N : 3 ( 8.5 points )**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on note  $f_n$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$  .

On désigne par  $(C_n)$  la courbe de  $f_n$  dans le repère **orthogonal**  $R(O; \vec{i}; \vec{j})$  tel que :  $\|\vec{i}\| = 1$  et  $\|\vec{j}\| = 10$

**A) 1) a)** Etudier les variations de  $f_1$  sur  $[0, +\infty[$  .

**b)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  , dresser le tableau de variations de  $f_n$  sur  $[0, +\infty[$  .

**2)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  , étudier les positions relatives de  $(C_{n+1})$  et  $(C_n)$  .

**3)** On a tracé dans l'annexe les courbes  $(C_1)$  et  $(C_3)$  .

**a)** Sans justification , graduer le repère puis nommer sur l'annexe les deux courbes .

**b)** Tracer **soigneusement** la courbe  $(C_2)$  ainsi que les demi-tangentes à l'origine pour chacune des trois courbes .

**B)** On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $U_n = f_n(n)$  .

**1) a)** En utilisant les résultats de la partie **A)** démontrer que  $(U_n)$  est décroissante sur  $\mathbb{N}^*$  .

**b)**  $(U_n)$  est-elle convergente ? ( Justifier votre réponse ) .

**2) a)** Montrer que pour tout  $t \in [0, 1]$  ,  $\frac{1}{1+t} \leq 1 - \frac{t}{2}$  .

**b)** Dédurre que pour tout  $x \in [0, 1]$  ;  $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{4}$  .

**c)** Prouver alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ,  $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}}$

**3) a)** Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ,  $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$  .

**b)** En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  on a :  $U_n \leq e^{-(1 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k})}$  .

**4) a)** Connaissons que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [k, k+1]$  on a :  $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$  ,

montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  on a :  $\int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$  .

**b)** En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  on a :  $U_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4} \ln(n)}$  .

**c)** Déterminer alors la limite de la suite  $(U_n)$  .



Nom et Prénom :

Annexe à rendre avec la copie

