

Lycée Mahmoud Elmesaadi ELFAHS	DEVOIR DE CONTROLE N° 2	Prof : Ben HMIDENE. T	
A.S 2017-2018	MATHEMATIQUES	4math	2heures

### Exercice n°1 (5points)

1)a) Calculer  $(2 + 2i\sqrt{3})^2$

b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $Z^2 - 4imZ + (6 - 2i\sqrt{3})m^2 = 0$  ou  $m$  est un paramètre complexe

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soient  $M, A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $m, a = (1 - i\sqrt{3})m, b = (3 + i\sqrt{3})m$  et  $c = a + b$

a) Montrer que  $O, M$  et  $C$  sont alignés

b) Ecrire sous forme exponentielle  $\frac{a}{m}$  et  $\frac{a}{b}$

c) Montrer que  $OACB$  est un rectangle

3) En prend  $m = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

Construire les points  $M, A, B$  et  $C$  dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

### Exercice n°2 (8points)

A- Soit la fonction  $f$  définie sur  $I = ]0, 1[$  par  $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x-x^2}}$ .

1) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $I$  et que pour tout  $x$  de  $I$   $f'(x) = \frac{1}{2(x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2) a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à déterminer

b) Soit  $g$  la fonction réciproque de  $f$ . Montrer que pour tout  $x \in J, g(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \right)$ .

3) a) Montrer que pour tout  $x \in J, 0 < g'(x) \leq \frac{1}{4}$ .

b) En déduire que l'équation  $g(x) = x$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique  $\alpha$ , vérifier que  $\alpha \in I$ .

4) On désigne par  $(C)$  et  $(C')$  les courbes représentatives de  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Ecrire une équation de la tangente  $T$  à  $(C')$  au point  $A$  d'abscisse  $\theta$ .

b) Etudier la position de  $(C')$  par rapport à  $T$ .

c) Tracer  $(C)$ ,  $(C')$  et  $T$ .

B- Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $E = ]0, \frac{\pi}{2}[$  par  $h(x) = \frac{1}{2}f(\cos^2 x)$ .

1) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $E$ ,  $h(x) = \cot(2x)$ .

b) Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $E$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) Soit  $k$  la fonction réciproque de  $h$ . Calculer  $k(0)$ ,  $k(1)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$ .

3) Montrer que  $K$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  ;  $k'(x) = \frac{-1}{2(1+x^2)}$ .

4) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $k(x) + k\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

### Exercice n°3 (7points)

Dans le plan orienté on considère un carré  $ABCD$  de centre  $I$  tel que :  $(\overline{AB}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

on désigne par  $J = A * D$ ,  $K = C * D$  et  $E$  le point de point tel que  $DBE$  est un triangle équilatéral direct, soit  $F = S_{(BE)}(C)$

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement  $f$  tel que  $f(A) = D$  et  $f(B) = A$ .

b) Caractériser  $f$ .

2) Soit  $g = r_{(B, \frac{\pi}{6})} \circ r_{(E, \frac{\pi}{3})}$

a) Vérifier que  $(\overline{BE}, \overline{BC}) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$

b) Donner la nature de  $g$ .

c) Déterminer  $g(C)$  et en déduire le centre de  $g$ .

3) Soit  $\varphi = t_{BC} \circ S_{(AC)}$

a) Déterminer  $\varphi(A)$  et  $\varphi(D)$

b) Vérifier que  $\varphi$  est une symétrie glissante et en déduire ses éléments caractéristiques.